目 录

第一章

常微分方程的初等解法

§1 基本概念

在一个(或者一组)方程中，如果未知的是函数，并且在方程中含有未知函数的导数或偏导数，就称该方程为微分方程(或者微分方程组)．如果微分方程中未知函数只是一个自变量的函数，就称该方程为常微分方程；如果未知函数是两个或多个自变量的函数，就称该方程为偏微分方程．

例如数学分析中求已知函数 $f(t)$ 的原函数，可以视为求未知函数 $x(t)$ 满足常微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t).$$

这个方程是最简单的常微分方程．

又如

$$\frac{dx}{dt}+p(t)x=q(t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g,$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}+a^2x=\sin t,$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

等，都是微分方程．第一、二、三是常微分方程；第四、五是偏微分方程．由于本书主要是讨论常微分方程，为方便起见，有时也简称常微分方程为方程．

从历史上来看，微分方程与微积分是同时产生的，而微分方程

从它诞生之日起就成为人类认识和改造自然的有力工具．早在十七世纪，牛顿(Newton)在创立微积分时，研究了天体力学，它与微分方程是密切不可分割的．而海王星在它未被发现之前，就被天文学家用微分方程的方法，经过许多计算预测了它的存在，后来才根据预测位置而被找到的．随着生产实践和科学技术的发展，微分方程也不断地向前发展成为数学学科的分支，并且是数学理论联系实际的重要桥梁之一．在化学、生物学、力学、电子技术、自动控制和星际航行等学科和现代技术中，微分方程已经成为不可少的工具，更加显示出它的作用．

一、基本术语

1．阶

在微分方程中所出现的未知函数的导数的最高阶数称为这个方程的阶．例如前一段所列举的三个常微分方程，依次为一阶、二阶和三阶；两个偏微分方程分别为一阶和二阶．一般的 n 阶常微分方程可以表示为

$$F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\ \cdots,\ \frac{d^nx}{dt^n}\right)=0, \tag{1}$$

这里，F 是 $t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\ \cdots,\ \frac{d^nx}{dt^n}$ 的已知函数，t 是自变量，x 是未知函数．所谓 n 阶方程，必须在方程中明显地出现未知函数的 n 阶导数，而低于 n 阶的导数以及自变量和未知函数则可能不明显地出现．

在常微分方程的讨论中，常用 t 代表自变量，用 $x,\ y,\ z,\ \cdots$ 或者 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 代表未知函数．除通常惯用的导数记号外，有时也用记号 $\dot{x}=\frac{dx}{dt},\ \ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$．在物理意义上，自变量 t 常代表时间，一阶和二阶导数分别代表速度和加速度．当然，也可以用其他记号来表示各个变量．

2．解和积分曲线

如果函数 $\varphi(t)$ 在某区间 $a<t<b$ 内有 n 阶连续导数，且把 $x=\varphi(t)$ 代入方程(1)后，能使等式

$$F(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t))=0$$

在 $a<t<b$ 内恒成立，则称函数 $x=\varphi(t)$ 为方程(1)的解，而称区间 $a<t<b$ 是解 $x=\varphi(t)$ 的定义区间。

有时不易求得解的表达式 $x=\varphi(t)$，而易求得 t, x 的关系式 $\Phi(t, x)=0$，若由它确定的隐函数 $x=\varphi(t)$ 是方程(1)的解，则称 $\Phi(t, x)=0$ 是方程(1)的积分。对于一个微分方程，求得它的积分，就相当于求得它的解。

解或积分在 t, x 平面上的几何表示是平面曲线，称为方程(1)的积分曲线。

例如，容易验证函数 $x=\sqrt{C^2-t^2}$ 和 $x=-\sqrt{C^2-t^2}$ (C 是正的任意常数)都是一阶方程

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{t}{x}$$

的解，它们的定义区间是 $-C<t<C$，而关系式

$$t^2+x^2=C^2$$

就是这个方程的积分。它在 t, x 平面上的图形是以原点为中心的圆周，是这方程的积分曲线。

3．方向场——微分方程的几何解释

已经解出导数的一阶方程的一般形状为

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x), \tag{2}$$

其中，$f(t, x)$ 是在 t, x 平面上某区域 D 内定义的函数。方程(2)的解 $x=\varphi(t)$ 表示 t, x 平面上的曲线，是我们所称的积分曲线，在其上每一点 (t, x) 处，积分曲线的切线斜率 $\frac{dx}{dt}$ 是函数 $f(t, x)$ 在这点的数值。反之，如果曲线 $x=\psi(t)$ 在其上每点 (t, x) 处的切线斜率 $\frac{d\psi(t)}{dt}$ 恰好是函数 $f(t, x)$ 在这点的值 $f(t, \psi(t))$，那末，$x=\psi(t)$ 就是方程(2)的解，曲线 $x=\psi(t)$ 就是方程(2)的积分曲线。

根据这样的几何解释，为了得到方程(2)的积分曲线，我们可

以在区域 D 内每一点 (t, x)，用 $f(t, x)$ 的值为斜率作直线段，有时还在这些直线段的一方画上箭头，这样，方程(2)在 D 内每点确定了一个方向，称方程(2)在 D 内确定了一个方向场．以这个方向场中的直线(或方向)为切线作出的曲线，就是积分曲线．

实际遇到的形状为(2)的方程，往往很难求出它的解的表达式．但是，我们总可以用方向场的方法近似地画出它的积分曲线，从而可以研究解的几何性状．当然，数学上的方向场，要每点作一直线段(或方向)，这在实际上是办不到的．但是，我们可以尽可能多画一些，以这些直线作为切线，把它们一小段一小段地连成光滑曲线，这样就近似地画出了方程(2)的积分曲线．还可以用等倾线的方法作方向场．

［例 1］　用方向场的方法画出方程

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{t}{x}$$

的积分曲线．

解　这方程在 t, x 平面上除坐标轴 $x=0$ 外都有定义，如果我们允许把斜率为 ∞ 的铅垂线也当作有意义的，那末，方程在除原点而外的平面上确定了方向场．为了画出方向场，可以先找出场中具有相同方向的点，即 $\frac{dx}{dt}=$ 常数 k 的点的轨迹，这种轨迹称为等倾(斜)线．这个方程的等倾线就是 $-\frac{t}{x}=k$，即从原点出发的直线 $x=-\frac{1}{k}t$．在其上每一点 (t, x) 的切线方向恰好与方向场在这点的方向垂直．取 $k=0, \pm1, \pm\frac{1}{3}, \pm3, \cdots$，就容易画出方向场．根据这个方向场，可以描出积分曲线就是以原点为中心的圆周(图

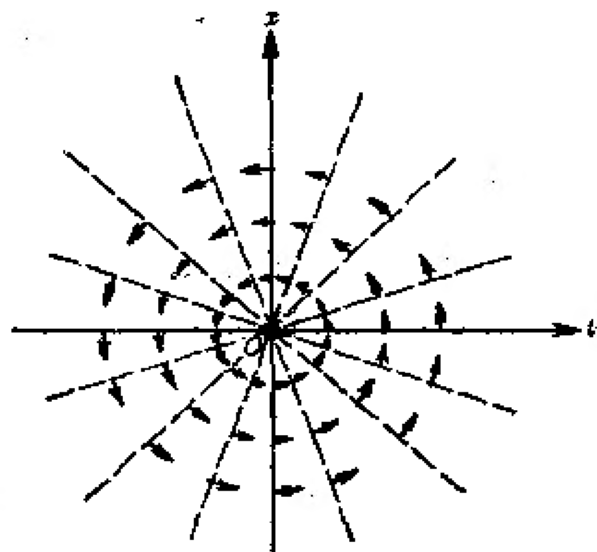


图　1.1

1.1). 这与上一段验证的结果相符.

[例 2] 试作方程

$$\frac{dx}{dt}=t^2+x^2 \tag{3}$$

的方向场，并画出积分曲线.

解 方程右端的函数在全平面上都有定义，因此，在全平面上确定了一个方向场. 场中的等倾线是圆周 $t^2+x^2=k^2$，在其上方向场中的方向合于以斜率为 k^2 的直线的方向，当 k 取某些定值，例如 $k=1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$ 时，就可以作出方向场. 然后，以方向场确定的方向作为切线就可以描出积分曲线的大致图形. 图 1.2 中的曲线分别代表过 $(0, 0)$，$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 和 $(1, 0)$ 的三条积分曲线.

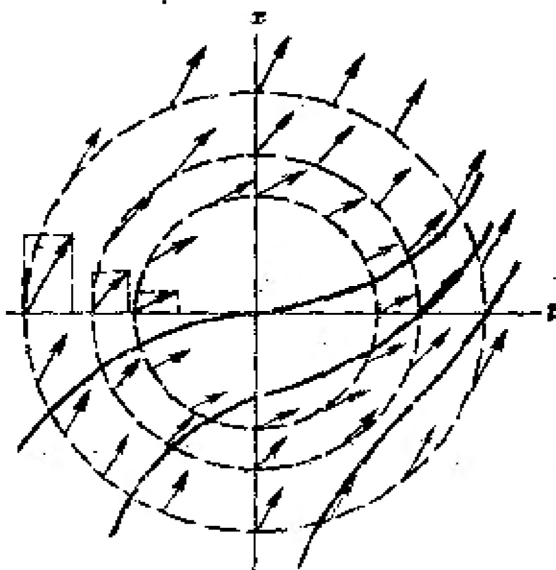


图 1.2

常用的所谓欧拉(Euler)折线，就是根据方向场的原理，从点 $P_0(x_0, y_0)$ 开始作以 $f(x_0, y_0)$ 为斜率的直线段，沿着它向右稍微移动到一个新点 $P_1(t_1, x_1)$，然后再作以 $f(t_1, x_1)$ 为斜率的直线段，沿着它仍向右方稍微移动到第三点 $P_2(t_2, x_2)$，…，如此继续几次，就在 P_0 点的右方构造成了一条"折线"(左方可完全类似地作出)，它可以近似地代表积分曲线. 如果加以光滑，就更加接近积分曲线的形状了. 如果对函数 $f(t, x)$ 加上某些条件的限制，当

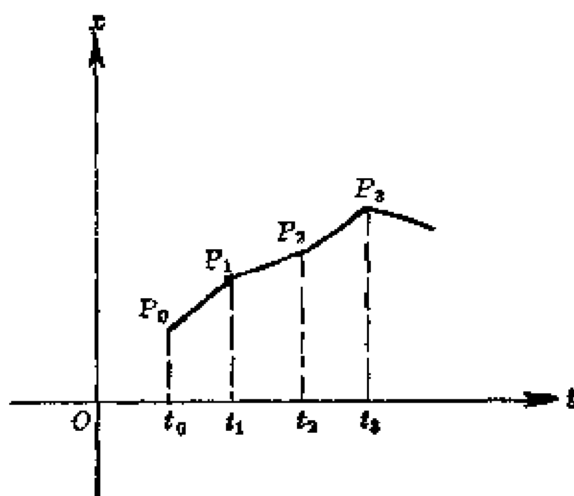


图 1.3

t_0, t_1, t_2, … 充分接近时，分段写出上述折线的函数表达式(直线方程)，这函数将逼近于方程(2)的解。

二、几个实例

[例 3] 放射性物质的衰变

放射性物质的原子核很不稳定，会自发地放出射线，变为另一种元素的原子核，这种现象，称为放射衰变。实验表明，原子核数目为 N 的镭，在单位时间衰变的原子核数目与 N 成正比，即

$$\frac{dN}{dt}=-\lambda N, \tag{4}$$

这里 $\lambda>0$ 是常数，由实验决定。设在 $t=0$ 时镭的原子核数目为 N_0，即

$$N(0)=N_0. \tag{5}$$

试问经多长时间它衰减一半，即确定它的半衰期。

容易验证 $N=N_0e^{-\lambda t}$ 是(4)的解，且满足条件(5)。现在研究怎样求方程(4)的解。移项得

$$\frac{dN}{dt}+\lambda N=0,$$

而 $\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}N)=e^{\lambda t}\left(\frac{dN}{dt}+\lambda N\right)$，所以

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}N)=0,$$

从而得到 $e^{\lambda t}N = C,$

这里 C 是任意常数. 所以

$$N = Ce^{-\lambda t} \tag{6}$$

是(4)的全部解, 我们称它为(4)的通解.

根据初始条件(5)来决定(6)中的 $C = N_0$, 所以(4)满足条件(5)的解是

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{7}$$

它称为(4)的特解.

如果 T 是它的半衰期, 那末

$$N_0 e^{-\lambda T} = \frac{N_0}{2},$$

所以

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{8}$$

实验可以测得 $\left.\frac{dN}{dt}\right|_{t=0}$, 从而可以决定 λ. 由此可得镭的半衰期为 1622 年.

该例表明, 为用微分方程研究实际问题, 首先应当根据物理实验得出的规律来列写方程, 即它的数学模型. 然后求解微分方程.

从解的表达式(6)看到, 方程(4)有无穷多个解, 而具体问题往往需要求出满足特定条件的解, 例如(7)是(4)的满足条件(5)的特解. 而条件(5)称为初值条件. 寻求满足初值条件的解的问题, 称为初值问题.

[例 4] 延时器的设计原理

气动延时器是利用恒容容器中气体排放规律设计的计时装置. 设容器中充满具有一定压强的气体, 从某时刻开始经过毛细管向外排放, 当容器中气体达到一定压强 p_1 时发出讯号, 达到计时的目的. 设初始时气体压强为 p_0, 在时刻 t 时的压强为 $p(t)$, 根据实验, 它的变化速度与压差 $p(t)-q$ 成正比, 其中 q 是大气压强, 即

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\lambda(p(t)-q),\ p(0) = p_0. \tag{9}$$

这里 $\lambda>0$ 是常数，它与毛细管的内径有关．试问：为了计测时间 T，应如何选择 λ，使得在 $t=T$ 时，压强 $p(t)$ 的变化速度为最大，这时的气体压强 p_1 称为**发讯压强**。

首先求解方程(9)．由于

$$\frac{d}{dt}\{e^{\lambda t}[p(t)-q]\}=e^{\lambda t}\left\{\frac{dp}{dt}+\lambda[p(t)-q]\right\}=0,$$

所以

$$e^{\lambda t}[p(t)-q]=C(\text{任意常数}),$$

即

$$p(t)=q+Ce^{-\lambda t}.$$

再根据 $p(0)=p_0$ 得 $C=p_0-q$．所以(9)的解为

$$p(t)=q+(p_0-q)e^{-\lambda t}. \tag{10}$$

由此，可以计算在 T 时刻 $\frac{dp}{dt}$ 的值

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=T}=-\lambda(p_0-q)e^{-\lambda T}.$$

选取 λ 使得 $\lambda(p_0-q)e^{-\lambda T}$ 达到最大值，为此关于 λ 求导而得

$$(p_0-q)(1-\lambda T)e^{-\lambda T}=0,$$

因此 $\lambda T=1$ 时，p 在 $t=T$ 时的变化速度达到最大，从而压强

$$p_1=p(T)=q+(p_0-q)e^{-1}=0.632q+0.368p_0.$$

这就是说，在设计时间为 T 的发讯装置时，宜于选取毛细管，使 $\lambda=\frac{1}{T}$，从而发讯压强

$$p_1=0.632q+0.368p_0.$$

气动计时装置在由气动器件组成的控制仪表中有广泛应用．这里只是谈谈设计时的基本原理．

[例 5] 阻容电路

由电阻 R、电容 C 和电源 E 串联而成的线性电路(如图 1.4 所示)，当考虑电容两端的电势降 $x(t)$ 时，称为**阻容电路**.

设电路中的电流强度为 $i(t)$，根据基尔霍夫(Kirchhoff)定律，电源电势 $E(t)$ 等于电路中电势降的和，即

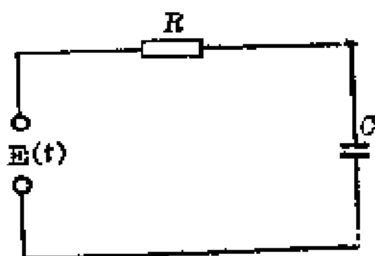


图 1.4

$$Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=E(t). \tag{11}$$

电容 C 的电势降 x 为

$$x=\frac{1}{C}\int i\,dt,$$

所以

$$i=C\,\frac{dx}{dt}.$$

代入(11)式得到

$$RC\,\frac{dx}{dt}+x=E(t). \tag{12}$$

这就是阻容电路的微分方程. $T=RC$ 称为这电路的时间常数. 现在求方程(12)满足初值条件

$$x(0)=0 \tag{13}$$

的解, 即设开始时电容两端的电势为 0.

用 $e^{t/T}$ 乘(12)的两端, 得到

$$\frac{d}{dt}\{Te^{t/T}x\}=Te^{t/T}\,\frac{dx}{dt}+e^{t/T}x=e^{t/T}E(t).$$

从 0 到 t 积分上式两端得到

$$Te^{t/T}x=\int_0^t e^{s/T}E(s)\,ds,$$

从而

$$x=\frac{1}{T}\int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-s)}E(s)\,ds \tag{14}$$

是方程(12)满足条件(13)的解.

特别, 当 $E(t)\equiv E_0$ 时, 它成为

$$x=E_0(1-e^{-t/T}). \tag{15}$$

由表达式(15)看出，当 $t\to+\infty$ 时电容两端的电势最终趋于电源的电动势 E_0，并且当 $t=T=RC$ 时，达到 E_0 的 63.2%．从方程

$$x+T\frac{dx}{dt}=E_0$$

看出，如果 x 自 t_0 开始以恒速 $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}$ 增长，经时间 T 后达到最终的稳态值 E_0，这也就是我们称 $T=RC$ 为阻容电路的时间常数的理由．当 $RC\gg1$ 时，称该电路为积分电路．

从方程(4)、(9)和(12)看出，它们都是一阶常微分方程，而且未知函数和未知函数的导数都是一次地出现，系数都是常数．称这样的方程为一阶常系数线性微分方程，在它们的求解过程中都有乘上某个因子 $e^{\lambda t}$ 的步骤．关于常系数线性方程的求解，我们将在第二章详细讨论．这些不同的物理问题，归结为同一类型的微分方程，对于我们是十分重要的．就是说，我们在研究一种物理问题后，可以用类似的方程研究另一种物理问题．这种数学方程的一致，促使我们有必要系统地研究常微分方程问题．

[例 6]　探照灯的设计原理

探照灯是用来获得平行光线的．假设把灯泡近似地视为点光源，我们试图获得一旋转曲面镜，使光线经反射后成为与旋转轴平行的光线．

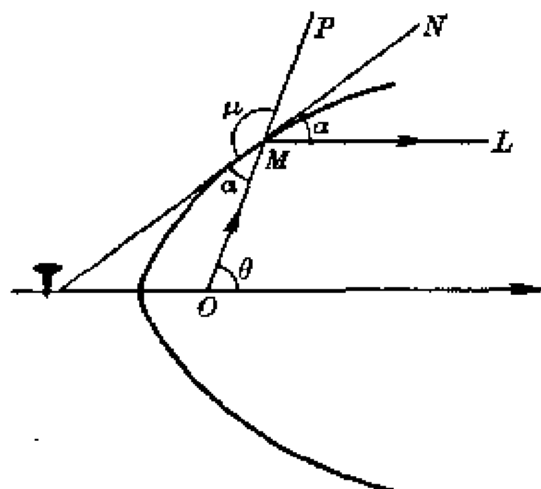


图　1.5

取点光源的位置为极点，旋转曲面的旋转轴为极轴，坐标平面与旋转曲面的交线是旋转曲面的母线，它的方程为 $r=r(\theta)$（图1.5）．

设光线自极点 O 经镜面的一点 M 反射后沿 ML 射出，根据要求，ML 应平行于极轴．又设曲线在 M 点的切线为 TMN．根据几何光学原理，$\angle OMT=\angle NML=\alpha$．又设极径 OM 与切线

NMT 的交角为 μ, 根据数学分析知

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}. \tag{16}$$

由图 1.5 知 $\mu=\pi-\alpha$, $\theta=2\alpha$, 所以 $\mu=\pi-\frac{\theta}{2}$, 从而

$$\operatorname{tg}\mu=-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

把它代入(16)得

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}=-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}. \tag{17}$$

这就是镜面母线所满足的微分方程.

由(17)有

$$\frac{d}{d\theta}\ln r=-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta},$$

所以 $$\ln r=C_1-\int\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta=C_1-\ln(1-\cos\theta),$$

即

$$r=e^{C_1}/(1-\cos\theta)=\frac{C}{1-\cos\theta}, \tag{18}$$

这里 $C=e^{C_1}$ 是不等于 0 的任意常数. (18)是抛物线的极坐标方程, 极点是抛物线的焦点. 如果化为直角坐标, 由(18)得

$$r-r\cos\theta=C,$$

即 $$r^2=(C+r\cos\theta)^2,$$

所以 $$x^2+y^2=(C+x)^2,$$

即

$$y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right). \tag{19}$$

这就是说, 探照灯镜面是旋转抛物面, 它的旋转轴就是镜面母线的轴, 而点光源所处的位置是抛物线的焦点.

为要确定具体的镜面, 需要根据其他条件决定(18)或(19)中的常数 C. 例如要求焦距 p 给定, 那末 $C=p$, 抛物线为

$$y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right),$$

或
$$r=\frac{p}{1-\cos\theta}.$$
方程(17)
$$\frac{dr}{d\theta}=-\frac{r\sin\theta}{1-\cos\theta},$$
是一个几何光学问题所归结的常微分方程. 它仍是一个一阶线性微分方程，但系数 $-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ 是自变量 θ 的函数，该方程是变系数线性常微分方程.

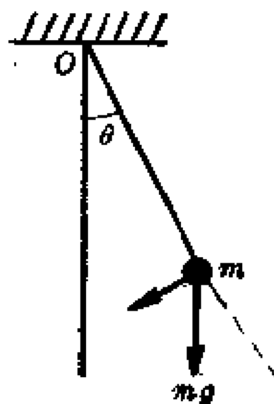


图 1.6

[例 7]　单摆

质量为 m 的球，用长为 l 的细线悬挂在 O 点(如图 1.6)，在地心引力下作往复摆动，如不计悬线的质量，称为单摆，球 m 称为摆球. 细线与垂线的夹角记为 θ，试求摆球的运动方程式.

摆球在运动时受到地心引力、阻力和线的张力的作用. 忽略阻力，而重力(地心引力)在 Om 连线上的分力与线的张力相平衡，重力在 Om 垂直方向的分力为 $mg\sin\theta$，根据牛顿定律，应有
$$m\cdot l\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta,$$
上式中的负号是因为重力的分力指向 θ 的减小方向. 于是得
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta. \tag{20}$$
这是一个二阶常微分方程，其中未知函数不是一次地出现，所以(20)是非线性微分方程.

当 θ 充分小时 $\sin\theta\approx\theta$，方程(20)近似地表示为
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0. \tag{21}$$
这是一个二阶常系数线性微分方程. 它的求解方法将在第二章详细讨论.

从上面五个简单例题看出，为了求出某些变量的函数关系，我们往往是根据实验规律先求出它的导数与变量之间的关系，即列写描述现象的微分方程，这称为*建立数学模型*. 然后求解微分方

程，得出所需要的函数关系．在求解常微分方程时，往往是先求它的通解，即含有任意常数的解，再根据条件决定特解．

在常微分方程的研究初期，人们致力于求出方程的全部解，并且成功地求出了一些简单微分方程的解．本章将讨论能够用初等函数或它们的有限次积分表示解的常微分方程，即初等积分法．

但是，1841 年法国数学家刘维尔(Liouville)证明，十分简单的黎卡提(Riccati)方程

$$\frac{dx}{dt}=x^2+t^\alpha$$

的解，除 α 是某些特殊值外，是不能用初等函数或它们的有限次积分表示的，即不能用初等积分法求解．它促使人们研究可用初等积分法求解的常微分方程的基础，李(Lie)用变换群的方法对此进行了研究．

从上述例子还可看出，线性微分方程是十分有用的．第二章将指出常系数线性微分方程是能够用初等方法求解的．我们在第二、三章将详细讨论线性微分方程．

非线性常微分方程一般是不能用初等积分法求解的．我们在第四章中将讨论常微分方程解的存在唯一性定理，它是常微分方程的基本理论．第五章是定性理论初步．第六章是一阶偏微分方程．

本书假定读者已具有微积分或数学分析的基础，并且学过线性代数或高等代数．

习　题

1．说明下列方程的阶、自变量和未知函数：

1) $\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)$;　　2) $\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)x^n$;

3) $\frac{dx}{dt}=P(t)x^2+Q(t)x+R(t)$;　　4) $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-4y=0$;

5) $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=P(x)$;　　6) $\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$,

其中 P、Q 和 R 是已知函数，a、b、n、l 和 g 是常数．

2．验证下列函数分别是所示方程的解：

1）函数：$x=Ce^{kt}$，　　方程：$\frac{dx}{dt}-kx=0$；

2）函数：$x=Ce^{\int p(t)dt}$，　　方程：$\frac{dx}{dt}=p(t)x$；

3）函数：$x=C_1e^{kt}+C_2e^{-kt}$，　　方程：$\frac{d^2x}{dt^2}-k^2x=0$；

4）函数：$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$，　　方程：$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$，

其中 k 是某个确定的常数，C、C_1、C_2 是任意常数．

5）函数：$x=\begin{cases}0, & 当\ t\leqslant 0,\\ t^{3/2}, & 当\ t>0,\end{cases}$　方程：$\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}$．

3．试作出下列方程的方向场，并画出原点附近的积分曲线：

1）$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$；　　2）$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$；

3）$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$；　　4）$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$．

4．对于方程 $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$，作过(0, 0)点的欧拉折线的图象，并分段写出近似解的表达式(规定取 x 轴上的间隔 $\Delta x=0.5$，折线在(0, 0)点左右各三段)．

5．试分别求出方程 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t^2-1}$ 过点(0, 1)及过点(2, 1)的积分曲线．

6．试求方程 $\frac{dx}{dt}=\operatorname{tg} t$ 过点(0, 0)的积分曲线．

7．一高温物体在 20°C 的恒温介质中冷却，设在冷却过程中降温速度随物体与介质的温差成正比，物体的初始温度为 u_0，10 分钟以后的温度为 u_1，求该物体在任意时刻 t 的温度 $u(t)$．

8．已知平面曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 (x, y) 的切线与坐标原点到这点的连线相交为定角 α，求 $y(x)$ 所适合的微分方程．

9．已知曲线的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，求这曲线所适合的微分方程．

§2 一阶方程的初等解法

从本节开始，介绍微分方程的初等解法．所谓初等解法，就是通过积分的方法，把方程的解用初等函数及初等函数的积分表示

出来，现在我们从最简单的类型谈起.

一、分离变量法

1. 变量可分离的方程

形状如

$$\frac{dx}{dt}=f(t)\cdot g(x) \tag{1}$$

的方程称为**变量可分离的方程**，它的特点是右端为自变量 t 的函数与因变量 x 的函数的乘积，其中 $f(t)$ 与 $g(x)$ 都是已知的连续函数. 为了求解这个方程，需要分别考察两种情况:

1) 若 $g(x)=0$ 有某些实根 $x=\alpha$，那末把这些函数 $x=\alpha$(每点取值都是 α 的常值函数)代入方程(1)就可以直接验证 $x=\alpha$ 是方程(1)的解.

2) 若 $g(x)\neq 0$. 设 $x=\varphi(t)$ $(a<t<b)$是方程(1)的解. 根据解的定义，在区间 $a<t<b$ 内就有

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}\equiv f(t)\cdot g(\varphi(t)),$$

因为 $g(\varphi(t))\neq 0$，上式可以改写为

$$\frac{d\varphi(t)}{g(\varphi(t))}\equiv f(t)dt.$$

在 $a<t<b$ 内任取一点 t_0，取 $\varphi(t_0)=x_0$，从 t_0 到 t 积分上式，推知在 $a<t<b$ 内有

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d\varphi(\tau)}{g(\varphi(\tau))}\equiv\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau.$$

在左端积分中，作代换 $\xi=\varphi(\tau)$，就得到

$$\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{d\xi}{g(\xi)}\equiv\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau,$$

所以 $x=\varphi(t)$是关系式

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{g(\xi)}=\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau \tag{2}$$

所确定的隐函数.

反之，若 $x=\psi(t)$在某区间 $a<t<b$ 内是由(2)所确定的隐函数，它在 t_0 取值 x_0，即在 $a<t<b$ 内成立恒等式

$$\int_{x_0}^{\psi(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)} \equiv \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau.$$

两边关于 t 求导，得到

$$\frac{1}{g(\psi(t))} \cdot \frac{d\psi(t)}{dt} \equiv f(t),$$

即
$$\frac{d\psi(t)}{dt} \equiv f(t) \cdot g(\psi(t)).$$

所以 $x=\psi(t)$ 是方程(1)的解，因此关系式(2)就是方程(1)的积分.

同样，可以证明关系式

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau + C \quad (C \text{ 是任意常数}) \qquad (2')$$

所确定的函数 $x=\psi(t, C)$ 也是方程(1)的解. 所以(2′)是方程(1)的通积分(含有任意常数的积分).

综合上述两种情况，在求解方程(1)时，除了求出使 $g(x)=0$ 的某些值 $x=\alpha$ 以外，只要用 $g(x)$ 除方程(1)的两边，使变量 t, x 分离开来，得到

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt,$$

采用不定积分，就得到通积分

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt + C.$$

以后如果不作特别的说明，那末 $\int \frac{dx}{g(x)}$ 与 $\int f(t)dt$ 分别表示 $\frac{1}{g(x)}$ 与 $f(t)$ 的某个确定的原函数. 这样，在原则上就求出了方程(1)的全部解(或积分). 其中的积分，在函数 $f(t)$ 与 $g(x)$ 给定后，应该尽可能计算出来. 还需要注意的是由 $g(x)=0$ 得出的解 $x=\alpha$，往往不包含在通积分中，不要在分离变量时因疏忽而把这种解丢失了.

[例 1]　求解方程

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}.$$

解 分离变量，得到

$$x\,dx = -t\,dt.$$

两边积分，就有

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}t^2 + C_1^2.$$

因此，圆周 $t^2 + x^2 = C^2 \quad (C \neq 0)$

就是通积分．或者从中求出通解 $x = \pm\sqrt{C^2 - t^2}$，这正是§1中得到过的结论．

[例2] 求解方程

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

解 1) 因 $x^2 - 1 = 0$ 有实根 $x = \pm 1$，因此函数 $x = 1$ 和 $x = -1$ 都是解．

2) 在 $x^2 - 1 \neq 0$ 时，即在区域 G_1: $x < -1$; G_2: $-1 < x < 1$; G_3: $x > 1$ 内，可分离变量，得到

$$\frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}dt.$$

两边积分，就得到通积分

$$\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = t + C_0,$$

即 $$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = e^{t+C_0} = e^{C_0}\cdot e^t = C_1 e^t \quad (C_1 = e^{C_0} > 0).$$

如果要解出 x，就必须分区域来讨论．

在区域 G_1 和 G_3 内，通积分是

$$\frac{x-1}{x+1} = C_1 e^t \quad (C_1 > 0),$$

从而 $$x = \frac{1 + C_1 e^t}{1 - C_1 e^t} \quad (C_1 > 0).$$

当 $-\infty < t < -\ln C_1$ 时，积分曲线在区域 G_3 内．当 $-\ln C_1 < t < +\infty$ 时，积分曲线在区域 G_1 内．

在区域 G_2: $-1 < x < 1$ 内，通积分是

$$\frac{x-1}{x+1} = -C_1 e^t = C_2 e^t \quad (C_2 = -C_1 < 0),$$

从而 $$x=\frac{1+C_2e^t}{1-C_2e^t}\quad (C_2<0),\ -\infty<t<+\infty.$$

三个区域内的解可以统一地写成

$$x=\frac{1+Ce^t}{1-Ce^t}\quad (C\neq 0).$$

如果允许 $C=0$，那末还可以使 $x=1$ 也包括在内. 因此，我们可以除去 $C\neq 0$ 的限制而得到方程的通解

$$x=\frac{1+Ce^t}{1-Ce^t}\quad (C\ \text{可以取任意值}).$$

此外，如果允许 C 取 ∞，就得到特解 $x=-1$. 积分曲线的全貌如图 1.7.

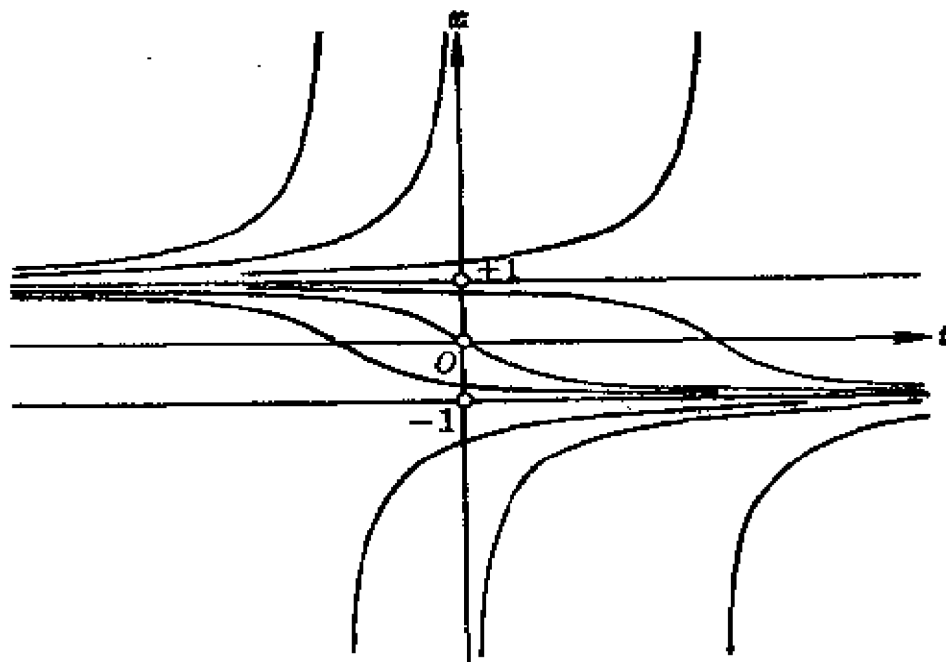


图 1.7

[例 3] 求解方程

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x,$$

其中 $P(t)$ 是 t 的连续函数.

解 在 $x\neq 0$ 时，分离变量得到

$$\frac{dx}{x}=P(t)dt,$$

两边积分，得到

$$\ln|x|=\int P(t)dt+C_1,$$

从而

$$|x|=e^{\int P(t)dt+C_1}=e^{C_1}\cdot e^{\int P(t)dt},$$

即 $$x=\pm e^{C_1}\cdot e^{\int P(t)dt}=Ce^{\int P(t)dt}\quad (C=\pm e^{C_1}\neq 0)$$

是通解．此外函数 $x=0$ 也是方程的解．原来它不包括在通解中，但是如果在通解中除去 $C\neq 0$ 的限制而允许 $C=0$，就可把这个特解 $x=0$ 包含在内，最后就得到方程的全部解是

$$x=Ce^{\int P(t)dt},$$

其中 C 是任意常数．

2．能化为变量可分离的方程

有些方程，虽然本身不能直接分离变量，但可以通过变量变换化为变量可分离的方程．下面介绍两种简单情形．

1）齐次方程

形状如

$$\frac{dx}{dt}=g\left(\frac{x}{t}\right) \tag{3}$$

的方程，称为*齐次方程*．其中 $g(u)$ 是 u 的连续函数．

作变换 $\frac{x}{t}=u$，即令 $x=ut$，引进新的未知函数 u 代替 x，那末由于

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt},$$

原方程变为 $$u+t\frac{du}{dt}=g(u),$$

整理后就得到变量可分离的方程

$$\frac{du}{dt}=\frac{g(u)-u}{t}.$$

在求得它的全部解之后，再用 $u=\frac{x}{t}$ 代回原变量 t, x，就得到原方程的全部解．

2）可化为齐次的方程

有些方程，可以经过变量变换化为齐次方程，从而求解．例如

方程

$$\frac{dx}{dt}=\frac{at+bx+c}{a_1t+b_1x+c_1} \tag{4}$$

就是其中之一，这里 a, b, c, a_1, b_1, c_1 都是已知的常数。

若 $c_1=c=0$, 那末(4)就是齐次方程.因此只要讨论 c 和 c_1 不全为0的情形. 此时，可试作变换

$$t=\xi+h,\ x=\eta+k, \tag{5}$$

引进新的变量 ξ, η 代替 t, x, 这里 h 和 k 是待定的常数. 把(5)代入方程(4)，得到

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a\xi+b\eta+ah+bk+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1h+b_1k+c_1}.$$

因此，选取常数 h, k 使

$$\begin{cases} ah+bk+c=0, \\ a_1h+b_1k+c_1=0, \end{cases} \tag{6}$$

就可以化为齐次方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}.$$

显然，方程组(6)的每一个方程表示一条直线，当这两条直线不平行时，(6)有唯一解 h 和 k. 变换(5)表示把坐标原点平移到这两条直线的交点(h, k).

这种方法仅在(6)中两直线平行时失效. 但此时方程组(6)的系数成比例，即 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$, 方程(4)实际上是

$$\frac{dx}{dt}=\frac{at+bx+c}{\lambda(at+bx)+c_1}=f(at+bx).$$

所以，作变换 $at+bx=y$ 就把它化为可分离变量的方程:

$$\frac{dy}{dt}=a+bf(y).$$

总之，形状为(4)的方程，通过适当的变换，可化为变量可分离的方程. 在实际求解时，可按具体情形，分别作出适当变换，求解后，再代回原变量 t, x, 就得到原方程的解(或积分).

对于更一般的方程

$$\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{at+bx+c}{a_1t+b_1x+c}\right),$$

也可以用上述方法来处理.

[例 4] 求解方程

$$\frac{dx}{dt}=2\left(\frac{x+2}{t+x-1}\right)^2.$$

解 令 $t=\xi+h$, $x=\eta+k$ 代入得

$$\frac{d\eta}{d\xi}=2\left(\frac{\eta+k+2}{\xi+\eta+h+k-1}\right)^2.$$

由 $k+2=0$, $h+k-1=0$, 解出 $h=3$, $k=-2$, 上述方程化为齐次方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=2\left(\frac{\eta}{\xi+\eta}\right)^2.$$

再令 $\eta=u\xi$, 则它化为

$$u+\xi\frac{du}{d\xi}=2\left(\frac{u}{1+u}\right)^2.$$

整理后就是
$$\frac{du}{d\xi}=-\frac{u(1+u^2)}{\xi(1+u)^2}.$$

分离变量并积分就得到

$$\int\left(\frac{1}{u}+\frac{2}{1+u^2}\right)du=-\int\frac{d\xi}{\xi}+C_1, \text{ 及 } u=0.$$

前者即
$$\ln|u|+2\operatorname{arc\,tg}u=-\ln|\xi|+C_1,$$

亦即
$$\ln|\xi u|=-2\operatorname{arc\,tg}u+C_1;$$

从而得到
$$\eta=Ce^{-2\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}}\quad (C=\pm e^{C_1}\neq 0).$$

如果允许 $C=0$, 那末就把 $u=0$ 所对应的特解 $\eta=0$ 也包含在内.

再代回原变量 t, x, 就得到原方程的通积分

$$x+2=Ce^{2\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{t-3}},$$

其中 C 是任意常数.

二、线性方程

形状如

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t) \tag{7}$$

的方程称为线性方程，其中 $P(t)$、$Q(t)$是某个区间 $a<t<b$ 内的连续函数．这类方程的特点是它关于未知函数 x 及其导数 $\frac{dx}{dt}$ 都是一次的．

若 $Q(t)\equiv 0$，则方程为

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=0, \tag{8}$$

称为齐次的线性方程．若 $Q(t)\not\equiv 0$，就称为非齐次的线性方程．齐次线性方程(8)可以用分离变量法求解．

对于方程(8)，可以用如§1的例题所示的方法求解．用函数 $e^{\int P(t)dt}$ 乘两边，使其左端化为 $xe^{\int P(t)dt}$ 的全导数．此时方程化为

$$\frac{d}{dt}\left(xe^{\int P(t)dt}\right)=0.$$

于是

$$xe^{\int P(t)dt}=C.$$

从而获得(8)的通解是

$$x=Ce^{-\int P(t)dt}\quad (C\text{ 是任意常数}).$$

别无其他解．

进而考察非齐次方程(7)，试用函数 $e^{\int P(t)dt}$ 乘(7)的两边后，方程化为

$$\frac{d}{dt}\left(xe^{\int P(t)dt}\right)=Q(t)e^{\int P(t)dt}. \tag{9}$$

于是

$$xe^{\int P(t)dt}=\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt+C. \tag{10}$$

从而获得①

---

① 表达式(11)也称为非齐次线性方程(7)解的常数变易公式．因为，在历史上最初是把(8)的通解 $x=Ce^{-\int P(t)dt}$ 中的任意常数 C 视为 t 的函数，使表达式 $x=C(t)e^{-\int P(t)dt}$ 为非齐次方程(7)的解而得到的．这时，$\frac{dC}{dt}=Q(t)e^{\int P(t)dt}$，所以有表达式(11)．在第三章中将用该方法求解非齐次线性微分方程组．

$$x=e^{-\int P(t)dt}\left[C+\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt\right],\tag{11}$$

这就是通解(C 为积分常数，可取任意值)．此外也别无其他解．

注意到上述方法在原方程两边所乘的因子$\neq 0$，这不会增加或减少原方程的解．这种用某个非零函数乘方程的两边，使之转化为可以求积分的方法，通常称为积分因子法，这种方法下面还要继续介绍．

线性方程在线性振动和线性电路中有着广泛的应用．

有些方程，可以作适当的变数变换化为线性方程，然后再求解．

［例 5］ 求解贝努利(J. Bernoulli, I. Bernoulli)方程

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)x^{\alpha},\tag{12}$$

其中 $P(t)$, $Q(t)$ 是 $a<t<b$ 内的连续函数．

解 当 $\alpha=0$ 时，它是线性方程．$\alpha=1$ 时是可分离变量的方程．又当 α 是正数时，$x=0$ 是一个特解．以下假设 $\alpha\neq 0$, 1．$x\neq 0$．我们用 x^{α} 除方程两边，得到

$$x^{-\alpha}\frac{dx}{dt}+P(t)x^{-\alpha+1}=Q(t).$$

因此，作变换 $y=x^{-\alpha+1}$，引进新的未知函数 y 后，由

$$\frac{dy}{dt}=(1-\alpha)x^{-\alpha}\frac{dx}{dt}$$

得到

$$\frac{dy}{dt}+(1-\alpha)P(t)y=(1-\alpha)Q(t).\tag{13}$$

这是关于 y 的线性方程，因此，可以求出它的全部解．然后再代回原变量 x，就得到原方程的全部解．

［例 6］ 求解方程

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}x+x^{2}.$$

解 这是一个贝努利方程．它有解 $x=0$，而当 $x\neq 0$ 时，以 x^{2} 除方程的两边，得到

$$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{2}{tx}+1,$$

即

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{t}\left(\frac{1}{x}\right)+1.$$

令 $y=\frac{1}{x}$，就得到

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{2}{t}y-1.$$

它是关于 y 的线性方程，可写出全部解为

$$y=e^{-\int\frac{2}{t}dt}\left(C_1-\int e^{\int\frac{2}{t}dt}dt\right)=\frac{1}{t^2}\left(C_1-\int t^2\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{t^2}\left(C_1-\frac{1}{3}t^3\right)=\frac{3C_1-t^3}{3t^2}=\frac{C-t^3}{3t^2}.$$

所以，原方程的全部解就是通解

$$x=\frac{3t^2}{C-t^3}$$

以及特解 $x=0$.

上面所叙述的求解方法都是用适当的变换使方程最终转化为可以求积分的类型。在常微分方程中，作变换是常用的方法。至于什么方程作什么变换可达到求解的目的，必须根据方程的特点，具体分析，灵活运用。求解方程时，从积分的角度来说，自变量与未知函数的地位是一样的，只要求得它们的关系式，就算原则上解决了求解问题。因而在某些情况下，为了方便起见，可以改变自变量与未知函数的地位，以达到求解的目的。

[例 7] 求解方程

$$\frac{dx}{dt}\left(x^3+\frac{t}{x}\right)=1.$$

解 初看上去，似乎无法着手，但若对调 t, x 的地位，就化为

$$\frac{dt}{dx}=\frac{t}{x}+x^3.$$

它是以 x 为自变量，t 为未知函数的线性方程，从而可求得 t 和 x 的关系式。这方程又可写为

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{dt}{dx}-\frac{t}{x^2}=x^2,$$

即
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{t}{x}\right)=x^2.$$

所以
$$\frac{t}{x}=C+\frac{1}{3}x^3,$$

即
$$t=Cx+\frac{1}{3}x^4$$

是原方程的通积分.

三、全微分方程和积分因子

在推导线性方程(7)的求解公式(11)时，我们运用了积分因子的方法. 本段继续介绍求解微分方程的这一途径，它的基础是全微分. 在上段末就说过，为了便于求解方程，可以把自变量和未知函数的地位当作是平等的，本段把方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{14}$$

改写为关于变量 x 和 y 是对称的形式:

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0, \tag{15}$$

这里假设 $M(x, y)$ 和 $N(x, y)$ 在 x, y 平面上的某区域 G 内连续，且有连续的一阶偏导数. 另外还假设 $M(x, y)$, $N(x, y)$ 不同时为 0. 方程(14)和(15)可以互化.

1. 全微分方程

如果方程(15)的左端 $M(x, y)dx+N(x, y)dy$ 是某一个函数 $u(x, y)$ 的全微分，即

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=du(x, y),$$

则称方程(15)是全微分方程(又称恰当方程).

例如方程

$$x\,dx+y\,dy=0,$$

它的左端是 $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 的全微分，所以它是一个全微分方程. 这个方程的通积分是

$$x^2+y^2=C.$$

对于一般的全微分方程(15)，容易看到，它的通积分就是

$$u(x, y)=C,$$

这里 C 是任意常数．因此，只要找到函数 $u(x, y)$，就可以解决全微分方程的求解问题．在一些简单的情形下，常可用观察法求出 $u(x, y)$，从而得到方程的积分．如果观察有困难，自然要问：如何判断方程(15)是全微分方程？如果是，怎样求出函数 $u(x, y)$？

这个问题，在数学分析中讨论曲线积分与积分路径的关系时已经解决了，即有

定理 假设方程

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0 \tag{15}$$

中的函数 M, N 在 x, y 平面上的单连通区域 G 内具有连续的一阶偏导数，那末，方程(15)是全微分方程的充分和必要条件是在 G 内成立着恒等式

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \tag{16}$$

并且函数 $u(x, y)$ 可由下式来表出：

$$u(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(\xi, \eta)d\xi+N(\xi, \eta)d\eta. \tag{17}$$

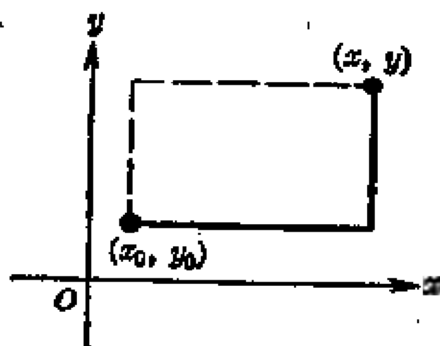


图 1.8

即对 $M\,dx+N\,dy$ 作由某定点 (x_0, y_0) 沿任意路线到点 (x, y) 的曲线积分．

特别，在 G 是矩形区域时，为方便起见，常可把积分路线取为两条平行于坐标轴的直线段(如图 1.8)，此时

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} M(\xi, y_0)d\xi+\int_{y_0}^{y} N(x, \eta)d\eta, \tag{18}$$

或

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi+\int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)d\eta. \tag{19}$$

在实际求解时，也可以不运用公式(18)或(19)，而利用

$$du(x, y)=M(x, y)dx+N(x, y)dy.$$

由此，函数 u 应该适合方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=N. \tag{20}$$

从而可以直接从(20)出发来计算．例如由第一个式子，有

$$u(x, y)=\int M(x, y)dx+\varphi(y),$$

计算上述积分时，把 y 当作常数，$\varphi(y)$ 是 y 的任意函数，再要求 $u(x, y)$ 满足(20)的第二式，就是对上述所得的函数 $u(x, y)$ 计算 $\frac{\partial u}{\partial y}$，并要求它等于 $N(x, y)$，即

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx+\varphi'(y)=N(x, y),$$

由此式确定 $\varphi'(y)$，再积分求出 $\varphi(y)$．

[例 8] 求解方程

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0. \tag{21}$$

解 这里 $M=3x^2+6xy^2$, $N=6x^2y+4y^3$，且

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=12xy;$$

即

$$\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}$$

成立．所以，给定的方程(21)是全微分方程．

现在要求函数 $u(x, y)$，使它同时满足条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+4y^3. \tag{22}$$

从第一式把 y 当作参数，对 x 积分，得到

$$u(x, y)=\int(3x^2+6xy^2)dx=x^3+3x^2y^2+\varphi(y),$$

这里 $\varphi(y)$是 y 的连续可微的任意函数，为了使 $u(x, y)$满足(22)的第二式，将这函数 $u(x, y)$的表达式对 y 求导，并代入(22)的第二式，得到

$$6x^2y+\varphi'(y)=6x^2y+4y^3,$$

所以

$$\varphi'(y)=4y^3,$$

从而可取

$$\varphi(y)=y^4,$$

$$u(x,\ y)=x^3+3x^2y^2+y^4.$$

最后

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C$$

就是方程(21)的通积分.

如果运用公式(18)，那末

$$\begin{aligned}u(x,\ y)&=\int_{x_0}^{x}(3\xi^2+6\xi y_0^2)d\xi+\int_{y_0}^{y}(6x_0^2\eta+4\eta^3)d\eta\\&=(\xi^3+3\xi^2y_0^2)\Big|_{x_0}^{x}+(3x_0^2\eta^2+\eta^4)\Big|_{y_0}^{y}\\&=x^3+3x^2y^2+y^4-x_0^3-3x_0^2y_0^2-y_0^4.\end{aligned}$$

与上面计算的结果相当（相差一个常数）.

对于方程(21)也可以采用重新分项组合的方法，求出函数 $u(x,\ y)$. 由于

$$\begin{aligned}&(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy\\&\quad=3x^2\,dx+4y^3\,dy+6(xy^2\,dx+x^2y\,dy)\\&\quad=d(x^3+y^4+3x^2y^2)=0,\end{aligned}$$

所以

$$x^3+y^4+3x^2y^2=C$$

是方程(21)的通积分.

2. 积分因子

有些形状为(15)的方程，本身不是全微分方程，但乘上一个适当的函数 $\mu(x,\ y)\neq 0$ 后能使方程

$$\mu(x,\ y)[M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy]=0 \tag{23}$$

成为全微分方程，我们称 $\mu(x,\ y)$ 是方程(15)的积分因子. 由于函数 $\mu(x,\ y)\neq 0$，因此，方程(15)与(23)的解是一样的.

例如线性方程

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=0$$

就具有积分因子 $e^{\int P(t)dt}$. 又如方程

$$y\,dx-x\,dy=0, \tag{24}$$

它并非全微分方程，但乘上函数 $\dfrac{1}{y^2}$ 后，就化为全微分方程

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=0,$$

所以 $\mu(x, y)=\frac{1}{y^2}$ 就是方程(24)的一个积分因子. 易见, 方程(24)还有其他的积分因子 $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{xy}, \frac{1}{x^2+y^2}, \frac{1}{x^2-y^2}$ 等等. 所以, 同一个方程, 可以有许多不同的积分因子. 从而在具体求解过程中, 由于所选择的积分因子不同, 所得到的通积分可能具有不同的形式, 但它们所定义的积分曲线是一样的.

如何求积分因子呢? 观察法自然是最简便的途径. 但在观察有困难时, 为了寻找积分因子, 我们可以根据函数 $\mu(x, y)\neq 0$ 是方程(15)的积分因子的充分必要条件

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

即

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

来决定 μ, 即 $\mu(x, y)$ 是偏微分方程

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \tag{25}$$

的解. 求解偏微分方程一般比求解常微分方程困难. 但是, 我们并不需要求偏微分方程(25)的通解, 而是只要能设法求得它的一个非零特解就行了. 这个要求, 在某些特殊情形下是可以办到的.

例如, 我们试找方程(25)的只与 x 有关而与 y 无关的解 $\mu(x)$, 那末 $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0, \frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dx}$, 这时, 方程(25)就是

$$N\frac{d\mu}{dx}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,$$

即

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx.$$

由此可知, 方程(15)具有只与 x 有关的积分因子 $\mu(x)$ 的充分必要条件是 $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ 只与 x 有关而与 y 无关. 这时, 可求得

$$\mu(x)=\exp\left[\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\right].\tag{26}$$

同理，方程(15)有只与 y 有关的积分因子 $\mu(y)$ 的充分必要条件是 $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ 只与 y 有关而与 x 无关．这时，可求得

$$\mu(y)=\exp\left[\int-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy\right].\tag{27}$$

[例 9] 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}.$$

解 首先，使分母有理化，方程就改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y},$$

再写成对称形式，

$$y\,dy=(\sqrt{x^2+y^2}-x)dx,$$

即

$$x\,dx+y\,dy=\sqrt{x^2+y^2}\,dx.$$

易见 $\mu=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是它的积分因子，用 μ 乘上式就得

$$d\sqrt{x^2+y^2}=dx,$$

所以它的通积分是 $\sqrt{x^2+y^2}=x+C$，即

$$y^2=2Cx+C^2.$$

一般说来，积分因子的寻找具有相当程度的技巧性，是不容易求得的．与全微分方程一样，有时候利用一些二元函数的全微分来观察得到积分因子．经常用的二元函数的全微分有

$$y\,dx+x\,dy=d(xy),$$

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=d(\sqrt{x^2+y^2}),$$

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=d\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y},$$

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\,d\ln(x^2+y^2)$$

等等.

本节讨论的是关于已解出导数的一阶方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y),$$

或其对称形式

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$$

的求解方法. 它主要是两种途径: 一种是以变量可分离的方程的解法为基础,设法经过变换把方程变成变量可分离的方程;另一种是以全微分方程为基础,设法寻求方程的积分因子,把方程化为全微分方程. 具体求解一阶常微分方程时,应区别方程的类型,选用适当的方法.

习 题

求下列方程的全部解或积分(1~27):

1. $\frac{dx}{dt}=\frac{x(1-t^2)}{t(1+t^2)}$.
2. $\sec^2 t\cdot \operatorname{tg} x\,dt+\sec^2 x\cdot \operatorname{tg} t\,dx=0$.
3. $\frac{dx}{dt}=\sin x$.
4. $t(x^2-1)dt+x(t^2-1)dx=0$.
5. $\sqrt{1-x^2}\,dt+\sqrt{1-t^2}\,dx=0$.
6. $\frac{dx}{dt}=1+x^2$.
7. $(x^4-2t^3x)dt+(t^4-2tx^3)dx=0$.
8. $(3x-7t+7)dt+(7x-3t+3)dx=0$.
9. $x^2+t^2\frac{dx}{dt}=tx\frac{dx}{dt}$.
10. $(t+2x+1)\frac{dx}{dt}=2t+4x+3$.
11. $RC\frac{du}{dt}+u=E_0\sin\omega t$, 其中 R、C、E_0、ω 为常数.
12. $\cos t\frac{dx}{dt}=x\sin t+\sin^2 t$.
13. $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{t+x^3}$.

14. $\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{1}{t}x=-\dfrac{1}{t^2}x^2$.

15. $t\dfrac{dx}{dt}-4x=t\sqrt{x}$.

16. $\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{t}{1+t^2}x=\dfrac{1}{t(1+t^2)}$.

17. $\dfrac{dx}{dt}(t^2x^3+tx)=1$.

18. $t\dfrac{dx}{dt}+x=tx^2\ln t$.

19. $\dfrac{t\,dt+x\,dx}{\sqrt{1+t^2+x^2}}+\dfrac{x\,dt-t\,dx}{t^2+x^2}=0$.

20. $e^{-x}dt+(1-te^{-x})dx=0$.

21. $e^{x}dt-t(2tx+e^{x})dx=0$.

22. $(2tx^2-x)dt+(x^2+t+x)dx=0$.

23. $\left(\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{t}{x}-\dfrac{x}{t^2}\cos\dfrac{x}{t}+1\right)dt+\left(\dfrac{1}{t}\cos\dfrac{x}{t}-\dfrac{t}{x^2}\sin\dfrac{t}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)dx=0$.

24. $(t-x^2)dt+2tx\,dx=0$.

25. $(t^2x^2-1)dx+2tx^3dt=0$.

26. $xe^{\frac{t}{x}}dt+(x-te^{\frac{t}{x}})dx=0$.

27. $\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d\phi(t)}{dt}x=\phi(t)\dfrac{d\phi(t)}{dt}$，其中 $\phi(t)$ 是已知函数。

28. 若已知 $x=\varphi(t)$ 是黎卡提方程 $\dfrac{dx}{dt}=P(t)x^2+Q(t)x+R(t)$ 的一个解，试用代换 $x=y+\varphi(t)$ 证明新的未知函数 y 应适合贝努利方程 $\dfrac{dy}{dt}=P(t)y^2+[2P(t)\varphi(t)+Q(t)]y$.

29. 考察函数 $x=3t$，并求解方程 $t\dfrac{dx}{dt}+x^2-x=9t^2$.

30. 求方程 $t\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+t^2}\dfrac{dx}{dt}=0$ 的通积分，并求过点 $(0,1)$ 的积分曲线。

31. 求方程 $(t-1)\cos x\,dx=2\sin x\,dt$ 的全部解，并求满足初值条件 $x(0)=\dfrac{\pi}{4}$ 的特解.

32. 求曲线 $y=y(x)$，使它的任意一点 (x,y) 的切线与坐标原点到这点的连线相交成定角 α，并就 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 画出图形(参考 § 1 习题 8)。

33. 设一闭合电路，由电阻 R、自感 L 及电源 E 串联而成，开始时电流强度为 0。试分别对

1) $E=E_0$,

2) $E=E_0\sin\omega t$,

求出接通电路后在任意时刻 t 的电流强度 $i(t)$. 这里 R、L、E_0、ω 为常数.

34. 一质量为 m 的质点，有大小与时间立方成正比（设比例系数为 k_1）的外力作用在其上，从初速为零开始作直线运动，此外，质点又受阻力，其大小与速度和时间的乘积成正比（设比例系数为 k_2）. 试求速度函数 $v(t)$.

35. 设一摩托艇在湖水中行驶，水的阻力与艇速成正比。设在艇速达到10千米/小时时发动机停止工作. 经过20秒钟，艇速是6千米/小时，试求在发动机停止工作后2分钟时的艇速.

36. 已知曲线上的任意两点 P 与 Q 之间的弧长与 P 和 Q 到定点 O 的距离之差成正比. 试求这曲线. [提示: 用极坐标.]

*37. 已知方程 $\frac{dx}{dt}=kx+f(t)$ 中的 k 是不等于零的常数. $f(t)$ 是以 ω 为周期的周期函数，试证它有且只有一个周期为 ω 的周期解. 并求出这个周期解.

38. 设函数 $\varphi(t)$ 在实轴 $-\infty<t<+\infty$ 上连续，$\dot{\varphi}(0)$ 存在，且有性质 $\varphi(t+s)=\varphi(t)\cdot\varphi(s)$，试求出函数 $\varphi(t)$.

39. 设连续函数 $x(t)$ 具有性质 $x(t+s)=\frac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$，且 $\dot{x}(0)$ 存在，试求 $x(t)$.

40. 求变量可分离方程 $M(x)N(y)dx+P(x)Q(y)dy=0$ 的积分因子.

41. 若方程 $dx-f(t,x)dt=0$ 有只依赖于 t 的积分因子，试证它一定是线性方程.

*42. 若 $M(x,y)$, $N(x,y)$ 都是 m 次齐次函数，求齐次方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 的积分因子.

*43. 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 都是 n 次齐次函数 $(n\neq-1)$，而 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 是全微分方程. 试证: 当 C 为任意常数时，

$$xP(x,y)+yQ(x,y)=C$$

是它的通积分.

44. 试求出方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

具有形状为 $\mu(x+y)$ 及 $\mu(x\cdot y)$ 的积分因子的充分和必要条件.

45. 求解方程

$$(2x^3+3x^2y+y^2-y^3)dx+(2y^3+3xy^2+x^2-x^3)dy=0.$$

46. 求解方程

$$(x^2y^3+y)dx+(x^3y^2-x)dy=0.$$

47. 若方程

$$\frac{dy}{dt}=\lambda y+P(t)e^{\alpha t}$$

中 $P(t)$ 是多项式，λ、α 是常数，证明：它的解具有形状

$$y=Ce^{\lambda t}+Q(t)e^{\alpha t},$$

其中 $Q(t)$ 也是多项式．当 $\lambda\neq\alpha$ 时，它的次数与 $P(t)$ 的次数相同；当 $\lambda=\alpha$ 时，它的次数等于 $P(t)$ 的次数加 1，C 是任意常数．

试作适当变换，求解下列方程(48～52)：

48. $\cos x\dfrac{dx}{dt}+\sin x=t+1$.

49. $\dfrac{dx}{dt}-1=e^{t+2x}$.

50. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t-x^2}{2x(t+x^2)}$.

51. $t\dfrac{dx}{dt}+x=x\ln(tx)$.

52. $\dfrac{dx}{dt}(t^2+x^2+3)=2t\left(2x-\dfrac{t^2}{x}\right)$.

§3 导数未解出的一阶方程

导数未解出的一阶方程的一般形状为

$$F(t,\ x,\ \dot{x})=0. \tag{1}$$

对于这类方程，总的求解原则是设法使它转化为导数已解出的类型，然后选用上节介绍的适当方法来求解．具体处理的方法有：

一、直接解出导数

如果能从方程(1)中直接解出导数 $\dot{x}$，就得到一个或几个形状为

$$\dot{x}=f_j(t,\ x)\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

的方程，求解这些已解出导数的方程，就求得了原方程(1)的全部解．

[例 1] 求解方程

$$\dot{x}^2-4x=0.$$

解 易从它直接解出 $\dot{x}$ 而得到两个方程:

$$\dot{x}=2\sqrt{x},\quad \dot{x}=-2\sqrt{x}\quad (x\geqslant 0).$$

求解这两个方程,得到

$$\sqrt{x}=t+C,\quad \sqrt{x}=-t+C\quad 及\quad x=0.$$

或者合并写为

$$x=(t+C)^2\quad 及\quad x=0.$$

它们就是原方程的全部解.

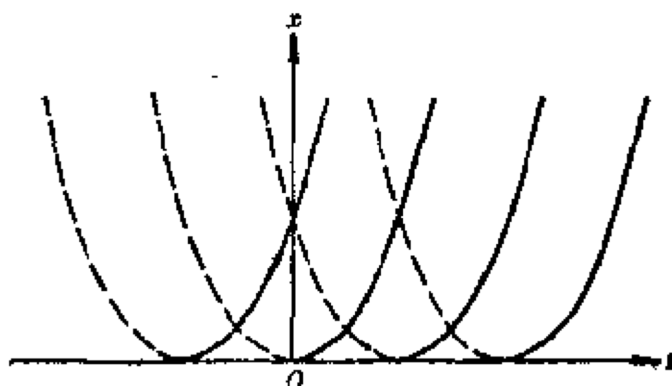


图 1.9

积分曲线的分布如图 1.9. 下半平面内方程无定义, 过上半平面内每一点都有两条积分曲线. 它们分别是抛物线的左半条和另一抛物线的右半条. $x=0$ 在边界上.

二、方程 $x=g(t,\dot{x})$ 或 $t=h(x,\dot{x})$

有时从方程

$$F(t,x,\dot{x})=0 \tag{1}$$

不易解出 $\dot{x}$, 或即使易于解出 $\dot{x}$, 然而不易用初等积分方法求解. 当易于从方程(1)解出 x 或 t 时,即得方程

$$x=g(t,\dot{x}) \tag{2}$$

或

$$t=h(x,\dot{x}). \tag{3}$$

现在讨论(2)和(3)的求解方法.

1. 对于方程(2),若记 $\dot{x}=p$, 那末(2)就成为

$$x=g(t,p). \tag{2'}$$

它表明方程(2)的积分曲线上点(t,x)与切线斜率 p 的关系, 如果在(2′)的两边对 t 求导得

$$p=\frac{dx}{dt}=\frac{\partial g(t,p)}{\partial t}+\frac{\partial g(t,p)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dt},$$

这时得到 p 的微分方程

$$\frac{\partial g(t,\ p)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dt}+\frac{\partial g(t,\ p)}{\partial t}=p, \tag{4}$$

它是 p 的变化率与 $t,\ p$ 的关系式.

如果容易求得(4)的通解

$$p=\varphi(t,\ C),$$

那末

$$x=g(t,\ \varphi(t,\ C))$$

是(2′)的解. 事实上, 由上式得

$$\frac{dx(t)}{dt}\equiv\frac{\partial g(t,\ \varphi(t,\ C))}{\partial t}+\frac{\partial g(t,\ \varphi(t,\ C))}{\partial p}\cdot\frac{d\varphi(t,\ C)}{dt}$$

$$\equiv\varphi(t,\ C),$$

从而得

$$x(t)\equiv g(t,\ \varphi(t,\ C))\equiv g\left(t,\ \frac{dx(t)}{dt}\right),$$

即 $x=g(t,\ \varphi(t,\ C))$ 是方程(2)的通解.

如果容易得到(4)的通积分

$$t=\psi(p,\ C),$$

那末(2)的通积分是

$$\begin{cases} t=\psi(p,\ C), \\ x=g(\psi(p,\ C),\ p). \end{cases}$$

这里我们是把 $p=\dot{x}$ 当作参数来描述积分曲线的.

2. 同样的说明对于方程(3)也适用. 即若记 $\dot{x}=p$, 那末(3)就成为

$$t=h(x,\ p), \tag{3′}$$

它是方程(3)的积分曲线上点 $(t,\ x)$ 与斜率 p 的关系. 如果在(3′)的两边对 x 求导, 得到

$$\frac{dt}{dx}=\frac{\partial h(x,\ p)}{\partial x}+\frac{\partial h(x,\ p)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx},$$

利用 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{p}$ 就推得 p 的微分方程

$$\frac{\partial h(x,\ p)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{\partial h(x,\ p)}{\partial x}=\frac{1}{p}, \tag{5}$$

它是 p 关于 x 的变化率与 $x,\ p$ 的关系.

如果容易得到(5)的通解

$$p=\varphi_1(x, C), \tag{6}$$

那末，把(6)代入(3′)就得到(3)的通积分

$$t=h(x, \varphi_1(x, C)).$$

如果容易得到(5)的通积分

$$x=\psi_1(p, C), \tag{7}$$

那末与(3′)联立得到

$$\begin{cases} t=h(\psi_1(p, C), p), \\ x=\psi_1(p, C) \end{cases}$$

就是(3)的通积分，这里将 p 当作参数，用它来描述积分曲线.

[例 2] 求解方程

$$x\dot{x}^2-2t\dot{x}+x=0. \tag{8}$$

解 记 $\dot{x}=p$, 则方程(8)可写为

$$xp^2-2tp+x=0. \tag{9}$$

当 $p\neq0$ 时，解出 t 得到

$$t=\frac{xp}{2}+\frac{x}{2p}. \tag{10}$$

在(10)的两边关于 x 求导，并利用 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{p}$, 得到

$$\frac{1}{p}=\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2p^2}\right)\frac{dp}{dx}+\frac{p}{2}+\frac{1}{2p},$$

或化简为

$$(p^2-1)\left(x\frac{dp}{dx}+p\right)=0,$$

于是得到两个方程

$$p^2-1=0 \quad 及 \quad x\frac{dp}{dx}+p=0.$$

从第一个方程求得 $p=\pm1$, 代入方程(10)，就得到特解

$$x=\pm t.$$

从第二个方程求得 $p=Cx^{-1}(C\neq0)$, 代入方程(10)，就得到通积分

$$x^2=2C\left(t-\frac{C}{2}\right), \ (C\neq0).$$

此外还有 $p=0$ 对应的解 $x=0$.

所以原方程的全部解(积分)是

$$x^2=2C\left(t-\frac{C}{2}\right)\quad (C\neq 0),\ x=\pm t\quad 及\quad x=0.$$

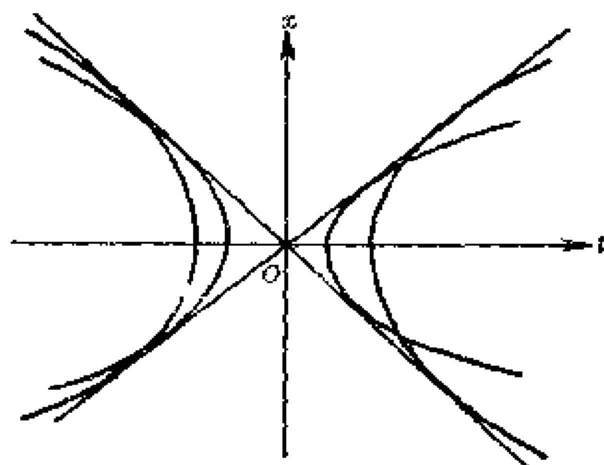


图 1.10

积分曲线的分布如图 1.10.

[例 3] 求解克来洛(Clairaut)方程

$$x=t\dot{x}+f(\dot{x}),\qquad (11)$$

其中函数 $f(u)$ 连续可导, 且 $f'(u)\neq$ 常数.

解 记 $\dot{x}=p$, 把方程改写为

$$x=tp+f(p),\qquad (12)$$

两边关于 t 求导, 并记 $\frac{dx}{dt}=p$, 得到

$$p=p+[t+f'(p)]\frac{dp}{dt},$$

即

$$\frac{dp}{dt}=0\quad 及\quad t+f'(p)=0.\qquad (13)$$

由第一个方程得 $p=C$, 代入原方程得到通解

$$x=Ct+f(C).$$

这个表达式相当于在原方程中用任意常数 C 代替 p 的结果.

由(13)的第二个方程得 $t=-f'(p)$, 代入原方程, 得到用 p 作参数的特解

$$\begin{cases} t=-f'(p), \\ x=-pf'(p)+f(p). \end{cases}$$

[例 4] 求所有这样的曲线, 它的切线与坐标轴所构成的三角形的面积等于常数 2.

解 设所求的曲线方程为 $x=x(t)$. 在曲线上的点 $(t,\ x(t))$ 处, 切线的方程是

$$X-x=\dot{x}(T-t).$$

这里 t, $x(t)$, $\dot{x}(t)$ 是固定的, T、X 是切线上的点的坐标. 这条切线在坐标轴上的截距 T_0、X_0 分别为

$$T_0=\frac{x-t\dot{x}}{-\dot{x}},\quad X_0=x-t\dot{x}.$$

依题意得到曲线 $x=x(t)$ 的微分方程为

$$\frac{1}{2}\left|\left(\frac{x-t\dot{x}}{-\dot{x}}\right)(x-t\dot{x})\right|=2,$$

即

$$(x-t\dot{x})^2=\mp 4\dot{x}, \tag{14}$$

其中的 $\pm$ 号是指当 $\dot{x}<0$ 时取"$-$"号, 当 $\dot{x}>0$ 时取"$+$"号.

先解方程

$$(x-t\dot{x})^2=-4\dot{x}\quad(\dot{x}<0),$$

得到

$$x=t\dot{x}\pm 2\sqrt{-\dot{x}},$$

这是克来洛方程, 象例 3 一样可以求得它们的通解

$$x=Ct\pm 2\sqrt{-C}\quad(C<0), \tag{15}$$

它是直线族, 而特解是

$$\begin{cases} t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{-p}}, \\ x=pt\pm 2\sqrt{-p}, \end{cases}$$

消去 p 得到双曲线

$$xt=1. \tag{16}$$

同理, 解方程

$$(x-t\dot{x})^2=4\dot{x}\quad(\dot{x}>0),$$

得到直线族

$$x=Ct\pm 2\sqrt{C}\quad(C>0), \tag{17}$$

和双曲线

$$xt=-1. \tag{18}$$

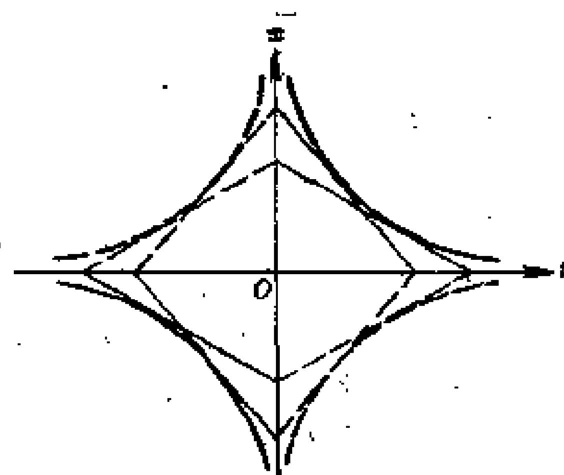


图 1.11

所有的解(积分)(15)、(16)、(17)、(18)都是所提问题的答案.

在这些答案中，引人注意的是双曲线 $x=\pm\dfrac{1}{t}$. 在其上的每一点都有通解中的直线与它相切(图 1.11).

如果微分方程的积分曲线，在其上每一点都有另外的积分曲线与它相切，这种积分曲线所对应的解，称为微分方程的奇解. 上述例 4 中的双曲线 $x=\pm\dfrac{1}{t}$ 就是方程(14)的奇解. 又如本节例 1 中的 $x=0$ 以及例 2 中的 $x=\pm t$ 也都是奇解.

习　题

求解下列方程(1～15):

1. $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3-4x^2\dfrac{dx}{dt}=0$.
2. $x=t\dot{x}^2+\dot{x}^3$.
3. $x=t\dot{x}+\dot{x}+\dot{x}^2$.
4. $x=2t\dot{x}+x^2\dot{x}^3$.
5. $t\dot{x}^3=1+\dot{x}$.
6. $x=t\dot{x}+\dfrac{m}{\dot{x}}$　(m 是常数).
7. $t\dot{x}^2-2x\dot{x}+t+2x=0$.
8. $x\dot{x}^2+\dot{x}(t-x)-t=0$.
9. $\dot{x}^2(t^2-1)-2tx\dot{x}+x^2-1=0$.
10. $t=x\dot{x}+\dot{x}^2$.
11. $\dot{x}^4=4x(t\dot{x}-2x)^2$.
12. $2tx\dot{x}=\dot{x}^2+4x^2$.
13. $\dot{x}=\ln(t\dot{x}-x)$.
14. $x(1+\dot{x}^2)=2a$　(a 为常数).
15. $\dot{x}^2-x\dot{x}+e^t=0$.

求解下列方程，并作图(16～21):

16. $t\dot{x}^2-2x\dot{x}+4t=0$.
17. $t\dot{x}^2+2t\dot{x}-x=0$.
18. $t\dot{x}^2-2x\dot{x}+2x=0$.
19. $x=\dot{x}^2-t\dot{x}+\dfrac{1}{2}t^2$.

20. $x=2t\dot{x}+\frac{1}{2}t^2+\dot{x}^2$.

21. $x^2\dot{x}^2+x^2=a^2\ (a>0)$.

22. 求曲线，使它的切线在两坐标轴之间的线段长度等于常数 a.

§4 高阶方程的降阶

n 阶微分方程一般地可以写为

$$F(t,\ x,\ \dot{x},\ \cdots,\ x^{(n)})=0. \tag{1}$$

$n\geqslant 2$ 时，统称为高阶方程．与一阶方程的通解有一个任意常数相类似，一般的 n 阶方程 (1) 的通解含有 n 个任意常数．高阶方程的求解途径，通常是通过变量变换使它降低阶数．现在分别讨论几种特殊类型的降阶问题．

一、不显含未知函数 x 的方程

不显含未知函数 x，或更一般地，不显含未知函数及其直到 $k-1(k\geqslant 1)$ 阶导数的方程，它的一般形状是

$$F(t,\ x^{(k)},\ \cdots,\ x^{(n)})=0. \tag{2}$$

易见，若令 $x^{(k)}=y$，就化为关于 y 的 $n-k$ 阶方程

$$F(t,\ y,\ \cdots,\ y^{(n-k)})=0. \tag{3}$$

它比原方程低 k 阶．一般说来，阶数低的方程较阶数高的方程容易求解．求出了方程(3)的解 $y=\varphi(t)$，就有

$$x^{(k)}=\varphi(t).$$

再积分 k 次，就得到原方程(2)的解．

[例 1]　求解方程

$$x^{(5)}-\frac{1}{t}x^{(4)}=0. \tag{4}$$

解　令 $x^{(4)}=y$，它就化为

$$\dot{y}-\frac{1}{t}y=0. \tag{5}$$

这是变量可分离的一阶方程，其全部解为

$$y=Ct=120C_1t\quad (\text{记 } C=120C_1).$$

所以　　$x^{(4)}=120C_1t.$

积分四次，就得到原方程(4)的通解

$$x=C_1t^5+C_2t^3+C_3t^2+C_4t+C_5,$$

这里 $C_1, C_2, \cdots, C_5$ 是五个任意常数。

二、不显含自变量 t 的方程

不显含自变量 t 的方程的一般形状是

$$F(x, \dot{x}, \cdots, x^{(n)})=0. \tag{6}$$

这时，若用 $y=\dot{x}$ 作为新的未知函数，而把 x 当作新的自变量，那末，由于

$$\frac{dx}{dt}=y,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y\cdot\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{d}{dt}\left(y\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(y\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$=y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

用数学归纳法容易证明 $\frac{d^kx}{dt^k}$ 可以用 $y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$ 表出 $(k\leqslant n)$. 把这些表达式代入原方程(6)，就得到

$$F\left(x, y, y\frac{dy}{dx}, y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2\frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\right)=0,$$

即新的方程

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=0. \tag{7}$$

它比原方程(6)低一阶.

[例 2]　求解方程

$$x\frac{d^2x}{dt^2}-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0. \tag{8}$$

解　令 $y=\frac{dx}{dt}$，并改取 x 作为新的自变量，那末

$$\frac{d^2x}{dt^2}=y\frac{dy}{dx}.$$

因此，方程化为

$$xy\frac{dy}{dx}-y^2=0.$$

从而可分为 $y=0$ 及 $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$.

由这两者可得全部解为

$$y=c_1x.$$

再代回原变量，得到

$$\frac{dx}{dt}=c_1x.$$

解这个方程，得到原方程(8)的全部解为

$$x=c_2e^{c_1t}.$$

在分析力学中常常遇到本段介绍的这类方程.

[例 3] 一个质量为 m 的质点，在只依赖于其位置 x 的外力 $f(x)$ 作用下，运动方程是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f(x).$$

用上述降阶的方法，令 $\frac{dx}{dt}=y$, 并改取 x 为自变量，就得到新的方程

$$my\frac{dy}{dx}=f(x).$$

分离变量后，两边从 x_0 到 x 积分，若记 $y(x_0)=y_0$, 则得到

$$\frac{1}{2}my^2-\frac{1}{2}my_0^2=\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi,$$

或者写成

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2_{x=x_0}=\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi. \tag{9}$$

关系式(9)是关于 x 的一阶微分方程，不显含自变量 t, 可以用本段的初等方法求解. 这个关系式的左边是物体从 x_0 移动到 x 时动能的增量，右边是外力 $f(x)$ 所作的功，因此(9)式的物理意义

表明外力 $f(x)$ 所作的功等于物体动能的增量. 这就是所谓动能定律.

[*例 4] 追线.

现在研究一个运动学的问题. 在 Ox 轴上有一点 P 以常速 a 沿着正方向移动; 在 x, y 平面上另有一点 M, 它以常速 v 移动, 方向永远指向动点 P, 求 M 点的轨迹(图 1.12).

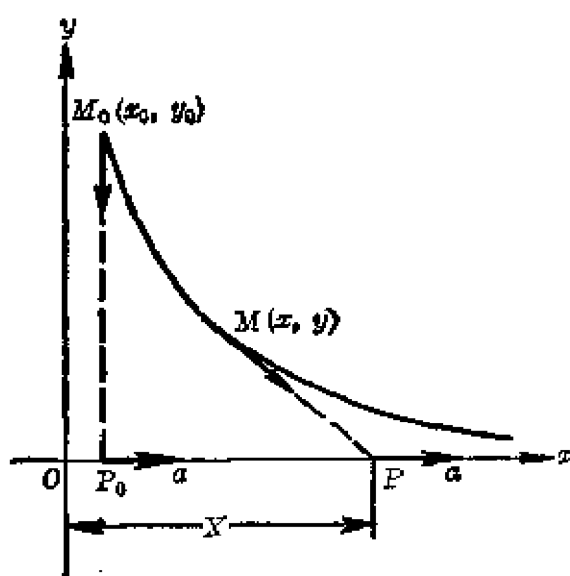


图 1.12

解 以 (x, y) 记点 M 在时刻 t 的坐标, 以 X 记点 P 在时刻 t 的坐标. 根据条件有

$$X = X_0 + at, \tag{10}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2, \tag{11}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{X - x}, \tag{12}$$

这里 X_0 是点 P 在 $t=0$ 时的坐标. 把(10)代入(12)得到

$$X_0 - x + at = -\frac{y}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

取 x 为自变量, 关于 x 导微上式, 得到

$$-1 + a\frac{dt}{dx} = -1 + \frac{y}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2},$$

即

$$\frac{dt}{dx} = \frac{y\dfrac{d^2y}{dx^2}}{a\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{13}$$

又由(11)式得到

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{1}{v^2}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right],$$

即

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{v}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{14}$$

上式右端取正号是因为假设点 P 沿 Ox 的正方向移动，而点 M 的速度向量又是指向点 P 的。

根据(13)和(14)，得到点 M 的轨迹（追线）的微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a}{vy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{15}$$

这个方程是不显含自变量 x 的微分方程．引进新的未知函数 $p=\frac{dy}{dx}$，并且改取 y 为新的自变量，那末 $\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$，方程(15)变为

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{a}{vy}p^2\sqrt{1+p^2}.$$

由此得到

$$\frac{dp}{dy}=\frac{ap}{vy}\sqrt{1+p^2} \quad 及 \quad p=0. \tag{16}$$

由于(12)，从 $p=0$ 得到解 $y=0$．即点 M 沿 Ox 轴移动．现在讨论(16)的前一方程，分离变量后积分得到

$$\int\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}}=\frac{a}{v}\int\frac{dy}{y}.$$

由图 1.12，在点 M 未追上点 P 之前，点 P 的横坐标总大于点 M 的横坐标，即当 $y>0$ 时 $p<0$，所以

$$\int\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}}=-\int\frac{\frac{dp}{p^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}}=\int\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}}d\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}\right).$$

由此得到 $$\ln\left(\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}\right)=\frac{a}{v}(\ln y+\ln C),$$

即 $$\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}=(Cy)^{\frac{a}{v}}.$$

为了确定常数 C，我们假设在开始追逐时，点 P 和 M 同在一条平行于 y 轴的直线上，并记它们的位置为 P_0 及 $M_0(x_0, y_0)$. 显然，此时 $\frac{1}{p}=0$，因此 $C=\frac{1}{y_0}$. 于是得到

$$\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}. \tag{17}$$

由此

$$-\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}, \tag{18}$$

从(17)减去(18)得到

$$\frac{2}{p}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}-\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}},$$

即

$$2\frac{dx}{dy}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}-\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}. \tag{19}$$

为了使点 M 有可能追上点 P，我们假设 $v>a$. 这时，由(19)得到追线方程为

$$2x=\frac{y_0}{1+\frac{a}{v}}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\frac{a}{v}}-\frac{y_0}{1-\frac{a}{v}}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\frac{a}{v}}+C_1.$$

由于初始点 $M_0(x_0, y_0)$ 在追线上，即当 $y=y_0$ 时 $x=x_0$（事实上，$x_0=X_0$），因此得到

$$C_1=2x_0+y_0\left(\frac{1}{1-\frac{a}{v}}-\frac{1}{1+\frac{a}{v}}\right),$$

从而追线方程是

$$x=\frac{y_0}{2\left(1+\frac{a}{v}\right)}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\frac{a}{v}}-1\right]-\frac{y_0}{2\left(1-\frac{a}{v}\right)}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\frac{a}{v}}-1\right]+x_0.$$

当 $y=0$ 时，就得到相遇点的坐标是

$$x_1=x_0+\frac{ay_0}{v\left(1-\frac{a^2}{v^2}\right)}=x_0+\frac{avy_0}{v^2-a^2}.$$

所需的追逐时间是

$$T=\frac{x_1-x_0}{a}=\frac{vy_0}{v^2-a^2}.$$

三、全微分方程和积分因子

如果方程

$$F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\cdots,\frac{d^nx}{dt^n}\right)=0 \tag{20}$$

的左端是某个 $n-1$ 阶微分表达式 $\Phi\left(t,\ x,\ \dot{x},\ \cdots,\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$对 t 的全导数，即

$$F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\cdots,\frac{d^nx}{dt^n}\right)=\frac{d}{dt}\ \Phi\left(t,\ x,\ \cdots,\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right).$$

我们就称(20)是全微分方程．这时，显然可知

$$\Phi\left(t,\ x,\ \cdots,\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)=C_1. \tag{21}$$

方程(21)是 $n-1$ 阶的，这样就降低了一阶．如能求得方程(21)的全部解

$$x=\varphi(t,\ C_1,\ \cdots,\ C_n),$$

那末，它也就是原方程(20)的全部解．其中 $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n$ 都是积分过程中出现的任意常数．

与一阶方程一样，有时方程(20)本身不是全微分方程，但乘上某个适当的函数 $\mu\left(t,\ x,\ \cdots,\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$后能使方程

$$\mu\left(t,\ x,\ \cdots,\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)F\left(t,\ x,\frac{dx}{dt},\cdots,\frac{d^nx}{dt^n}\right)=0$$

成为全微分方程．这时，就称函数 $\mu\left(t,\ x,\ \cdots,\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$是方程(20)的积分因子．

[例 5] 用积分因子的方法求解例 2 中的方程

$$x\frac{d^2x}{dt^2}-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0. \tag{22}$$

解　这方程不是全微分方程，但乘上函数 $\mu=\frac{1}{x^2}$ $(x\neq0)$ 后，左式化为

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\ \frac{dx}{dt}\right),$$

即化为全微分方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}\right)=0. \tag{23}$$

所以

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}=C_1.$$

由此得到

$$x=C_2e^{C_1t}\quad (C_2\neq0).$$

此外，在乘积分因子时，我们限制了 $x\neq0$，而 $x=0$ 也是原方程的解，必须补上，但它可以在去掉 $C_2\neq0$ 的限制后而包含在上述表达式中。所以

$$x=C_2e^{C_1t}$$

就是原方程的全部解(C_1, C_2 是两个任意常数)。与例2结果相同。

[例 6]　例3中质点运动时的位置函数 $x(t)$ 所适合的微分方程

$$m\ddot{x}-f(x)=0$$

本身不是全微分方程，但乘上因子 $\dot{x}$ 后，左边是全微分

$$m\dot{x}\ddot{x}-f(x)\dot{x}=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\ m\dot{x}^2-\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi\right],$$

即可化为全微分方程

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\ m\dot{x}^2-\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi\right]=0.$$

积分后得

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2_{x=x_0}=\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi.$$

这样又得到了动能定律。

这种乘 $\dot{x}$ 使方程化为全微分方程的方法，在力学中是常用的。

[*例 7]　物体在空气中的下落运动

现在略谈空气阻力对物体在空气中下落(或上抛)的影响。一

般地，物体在空气中运动受到的阻力与速度有关。两者的关系没有明显的精确公式。实验证明，对于5米/秒以下的低速运动，空气阻力f与速度v成正比，即$f=kv$(k是比例系数)。速度在5米/秒以上直至8/10声速的运动，阻力$f=kv^2$。对于接近声速(330米/秒)的运动，阻力就很不规则。超声速前进的火箭所受的空气阻力$f=kv^4$。所有的情形，比例系数的测定是相当复杂的，它与物体的形状、大小和质量有关，影响它的因素还有空气的湿度、温度、密度等等。

一个质量为m的物体，从某高处由静止开始下落(或上抛)，所受的空气阻力通常与它的速度平方成正比。如果把坐标原点取在物体下落时的起始位置，y轴向下为正，那末，物体下落时的运动方程为

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-k\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

令$\frac{dy}{dt}=v$，它就降为一阶方程

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2. \tag{24}$$

若记$\mu^2=\frac{mg}{k}$，分离变量，并进行积分，可得

$$\ln\frac{\mu+v}{\mu-v}=\frac{2g}{\mu}t+C.$$

根据物体由静止开始下落，即初始条件为$t=0$时$v=0$，可知积分常数$C=0$。于是解出

$$v=\mu\left(\frac{e^{\frac{g}{\mu}t}-e^{-\frac{g}{\mu}t}}{e^{\frac{g}{\mu}t}+e^{-\frac{g}{\mu}t}}\right)=\mu\,\mathrm{th}\frac{g}{\mu}t.$$

上式说明，随着物体下落时间t的增加，v很快地趋向于一极限速度

$$\mu=\sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

由于$v=\frac{dy}{dt}$，从v的表达式再进行积分，就得到

$$y=\int v\,dt=\mu\int \operatorname{th}\frac{g}{\mu}t\,dt=\frac{\mu^2}{g}\ln(e^{\frac{g}{\mu}t}+e^{-\frac{g}{\mu}t})+C_1$$

$$=\frac{\mu^2}{g}\ln\operatorname{ch}\frac{g}{\mu}t+C_2.$$

因为在我们选取的坐标系中 $t=0$ 时 $y=0$，所以 $C_2=0$，从而

$$y=\frac{\mu^2}{g}\ln\operatorname{ch}\frac{g}{\mu}t.$$

如果需要求出位置 y 与速度 v 的关系，可以利用

$$\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dy},\quad g=\frac{k}{m}\mu^2,$$

把方程(24)改写为

$$v\frac{dv}{dy}=\frac{k}{m}(\mu^2-v^2),$$

分离变量后积分，并利用初始条件：$y=0$ 时 $v=0$，可得

$$y=\frac{m}{2k}\ln\frac{\mu^2}{\mu^2-v^2},$$

或

$$v^2=\mu^2(1-e^{-\frac{2k}{m}y}).$$

由此也得到物体下落后随着 y 的增加，v 很快地趋于极限速度 μ 的结论．还可以看出，下落物体的质量愈小(大)，就愈迅速(缓慢)地达到极限速度．

习 题

求解方程(1～14)：

1. $\frac{d^2x}{dt^2}-t\frac{d^3x}{dt^3}+\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)^3=0$.

2. $x\frac{d^2x}{dt^2}-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=x^2\ln x$.

3. $a^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2=\left[1+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]^3 \quad (a>0)$.

4. 1) $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$;

   2) $\frac{d^2x}{dt^2}-\omega^2x=0$. $(\omega>0)$

5. $\frac{d^3x}{dt^3}=\sqrt{1+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2}$.

*6. 在 $v=a$ 时求解追线方程: $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a}{vy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

7. $\frac{d^2x}{dt^2}=t\frac{dx}{dt}+x+1$.

8. $t\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}=t^2x\frac{dx}{dt}$.

9. $x\frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+15x^2\sqrt{t}$.

10. $t\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+t\sin\left(\frac{1}{t}\cdot\frac{dx}{dt}\right)$.

11. $\frac{d^3x}{dt^3}=2\left(\frac{d^2x}{dt^2}+1\right)\operatorname{ctg} t$.

12. $\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2e^{-x}$.

13. $\cos x\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\sin x\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{dx}{dt}, x(-1)=\frac{\pi}{6}, \dot{x}(-1)=2$.

14. $2\frac{d^3x}{dt^3}-3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0,\ x(0)=-3,\ \dot{x}(0)=1,\ \ddot{x}(0)=-1$.

15. 一个物体只受地球引力的作用，从高空落下，如果已知地球半径为 6400 千米，试求该物体落地时的速度. [提示: 取地心为坐标原点，应用万有引力定律.]

16. 一个质点徐徐沉入液体，设下沉时的反作用力与速度成正比，试求质点的运动.

17. 设有质量为 2 千克的物体，受到与物体位移的三次方成正比的力的作用(比例常数为 1). 已知位移等于 1 米时的速度为 0.5 米/秒. 试求该物体的运动.

18. 求曲线 $y=y(x)$, 使它在任意一点 (x, y) 的曲率等于在这点 (x, y) 的切线与横轴交角的正弦.

§5 微分方程组的初等积分法与首次积分

在用微分方程描述工程、物理、力学以及几何等问题时，往往要牵涉到几个未知函数以及它们的导数. 这时的数学模型是微分方程组. 为此，本节介绍方程组的初等积分法.

n 个未知函数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的常微分方程组的一般形状是

$$F_j(t, x_1, \dot{x}_1, \cdots, x_1^{(m_1)}; \cdots; x_n, \dot{x}_n, \cdots, x_n^{(m_n)})=0 \quad (1)$$
$$(j=1, 2, \cdots, k).$$

一般说来，方程的个数 k 和未知函数的个数 n 不一定相等. 在本

书中，我们只讨论 $k=n$ 的情形. 特别地，在一定条件下，从(1)中解出最高阶导数 $x_1^{(m_1)}, \cdots, x_n^{(m_n)}$ 的方程组，即

$$\begin{aligned}
x_1^{(m_1)} &= f_1(t,\ x_1,\ \dot{x}_1,\ \cdots,\ x_1^{(m_1-1)};\ \cdots;\ x_n,\ \dot{x}_n,\ \cdots,\ x_n^{(m_n-1)}),\\
x_2^{(m_2)} &= f_2(t,\ x_1,\ \dot{x}_1,\ \cdots,\ x_1^{(m_1-1)};\ \cdots;\ x_n,\ \dot{x}_n,\ \cdots,\ x_n^{(m_n-1)}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n^{(m_n)} &= f_n(t,\ x_1,\ \dot{x}_1,\ \cdots,\ x_1^{(m_1-1)};\ \cdots;\ x_n,\ \dot{x}_n,\ \cdots,\ x_n^{(m_n-1)}).
\end{aligned} \tag{2}$$

我们称已解出最高阶导数的方程组(2)为标准的方程组. 方程组(2)的解是指确定在 $a<t<b$ 内的 n 个函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$，如果用它们代入方程组(2)后能成为 $a<t<b$ 内的 n 个恒等式.

特别，当 $m_1=m_2=\cdots=m_n=1$ 时，标准的一阶方程组就是

$$\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\\
\dfrac{dx_2}{dt}=f_2(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n).
\end{cases} \tag{3}$$

引进新的未知函数，可以把一般的标准方程组(2)化为标准的一阶方程组. 为简单起见，以一个未知函数的标准的 n 阶方程

$$x^{(n)}=f(t,\ x,\ \dot{x},\ \cdots,\ x^{(n-1)}) \tag{4}$$

为例来说明.

引进新的未知函数：$x_1=x,\ x_2=\dfrac{dx}{dt}, \cdots, x_n=\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ 后，方程(4)就化为标准的一阶方程组

$$\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt}=x_2,\\
\dfrac{dx_2}{dt}=x_3,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{dx_{n-1}}{dt}=x_n,\\
\dfrac{dx_n}{dt}=f(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n).
\end{cases} \tag{5}$$

如果求得了 n 阶方程(4)的解 $x=\varphi(t)$，那末函数组

$$x_1=\varphi(t),\ x_2=\dot{\varphi}(t),\ \cdots,\ x_n=\varphi^{(n-1)}(t)$$

就是方程组(5)的解. 反之，如果求得了方程组(5)的解

$$x_1=\psi_1(t),\ x_2=\psi_2(t),\ \cdots,\ x_n=\psi_n(t),$$

那末 $x=\psi_1(t)$ 就是 n 阶方程(4)的解. 因此，在这种意义下，我们把方程组(5)与方程(4)看作是等价的.

由于任何标准的方程组(2)都可以用引进新的未知函数的方法，化为标准的一阶方程组(3)，所以我们就着重讨论方程组(3)的初等解法.

仍如前面对于一阶及高阶方程一样，能用初等方法求解的方程组为数不多，方程组的初等解法的途径有两条.

一、化为高阶方程

从方程组(3)及把它们求导所得的方程中，保留一个未知函数而消去其他的未知函数，得到一个 n 阶方程，求解这个 n 阶方程，就解出了一个未知函数，其他的未知函数可从原方程组及由它们求导所得的方程给出，而不再加以积分.

[例 1] 求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x.\end{cases}\tag{6}$$

解 选取其中之一，譬如选第一个方程，两边对 t 求导，得到

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt},$$

再根据(6)的第二个方程，就得到关于 x 的二阶方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x=0.$$

它的全部解是

$$x=C_1e^t+C_2e^{-t}\tag{7}$$

(参考本章§4习题4). 这就是方程组(6)中变量 x 的表达式. 为

了求出 y，可以根据(7)及(6)的第一式，立即得到

$$y=\frac{dx}{dt}=C_1e^t-C_2e^{-t}.$$

于是，原方程组(6)的全部解是

$$\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t}, \\ y=C_1e^t-C_2e^{-t}. \end{cases} \tag{8}$$

应该注意的是使用这种方法(即化方程组为高阶方程来求解)时，在求得变量 $x=C_1e^t+C_2e^{-t}$ 后，不能再用求积分的方法来获得另一变量 y. 如果由方程组(6)的第二式

$$\frac{dy}{dt}=x=C_1e^t+C_2e^{-t}$$

再积分一次，得到 $y=C_1e^t-C_2e^{-t}+C_3$，就引进了多余的积分常数 C_3，反而使它不能满足方程组(6)的第一式. 用直接代入方程的方法就可验知，当且仅当 $C_3=0$ 时，上述的 y 才是方程组(6)的解.

这是因为方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 是把(6)的第一式代入第二式得到的，所以，在得到(7)后，只能与(6)的第一式联立，而不能再与(6)的第二式联立，这与线性代数方程中的消去法相当.

二、首次积分方法

常常可用所谓首次积分的方法来解方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{3}$$

如果由方程组(3)经过一定的运算，能得出某个易于积分的全微分方程

$$d\Phi(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0,$$

自然就得到一个联系自变量 t 和未知函数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n$ 的关系式

$$\Phi(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=C.$$

这个关系式(有时也指函数 Φ)称为方程组(3)的一个首次积分.

首次积分常可用来求解方程组，下面用例题来说明.

[例 2] 用首次积分方法求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x.\end{cases}\tag{6}$$

解 两式相加得到

$$\frac{d(x+y)}{dt}=x+y,$$

由此可得关系式 $x+y=C_1e^t$，我们称

$$(x+y)e^{-t}=C_1$$

是方程组(6)的一个首次积分. 把方程组(6)的两式相减得到

$$\frac{d(x-y)}{dt}=-(x-y),$$

从而又得到 $x-y=C_2e^{-t}$，所以另一个首次积分是

$$(x-y)e^t=C_2.$$

从这两个首次积分立即得到

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(C_1e^t+C_2e^{-t})=Ae^t+Be^{-t},\\ y=\dfrac{1}{2}(C_1e^t-C_2e^{-t})=Ae^t-Be^{-t}.\end{cases}$$

这与例1用化为高阶方程解得的结果一样.

[例3] 求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{y},\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{t}{x}.\end{cases}\tag{9}$$

解 两式相除，消去 t 得到

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y},$$

从而获得一个首次积分

$$\frac{x}{y}=C_1.\tag{10}$$

把 $x=C_1y$ 代入方程组的第二式，可得

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t}{C_1y},$$

积分后有
$$C_1y^2-t^2=C_2.$$
即
$$xy-t^2=C_2 \tag{11}$$
是另一个首次积分，从这两个首次积分(10)与(11)，可以把 x 和 y 解为 t 的函数，就是原方程组的解。因而

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=C_1, \\ xy-t^2=C_2 \end{cases}$$

就是方程组(9)的通积分。

从以上例题可以看到，一般地，n 个未知量的一阶方程组的通解(或通积分)与 n 阶方程一样，含有 n 个任意常数。还可以看到首次积分在求解方程组时的作用。找首次积分的方法，原则上就是设法从原方程组(3)经过适当的运算，重新组成一个全微分方程：

$$d\psi(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0,$$

从而找到一个首次积分

$$\psi(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=C.$$

在找到一个或几个首次积分后，可以利用它们解出某些未知函数代入方程组，以利于继续求积(例3就是用这种方法)，直至找出 n 个互相独立的首次积分为止。这里所谓 k 个首次积分 $\psi_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)=C_i(i=1,2,\cdots,k)$ 互相独立的意思是指它们的雅可比(Jacobi)矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

的秩为 k。

有时候，特别在力学上，虽然没有求出方程组的通解，但易于求得几个首次积分，它们本身就具有一定的力学意义。例如§4例

3 中的关系式(9)就说明质点在运动过程中能量是守恒的，它是一个首次积分. 又如从人造卫星运动的微分方程组(采用极坐标):

$$\begin{cases}\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\dfrac{k}{r^2},\\ r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0,\end{cases}$$

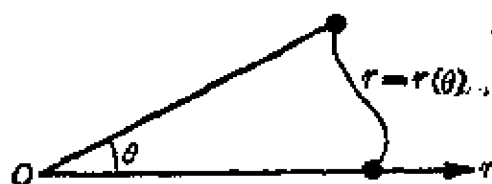


图 1.13

用 r 乘第二式可得

$$r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta}=0,$$

即

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0.$$

由此立即得到一个首次积分

$$r^2\dot{\theta}=C.$$

因为卫星从开始运动到时间 t, 矢径绕地心 O 扫过的面积是

$$A=\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^t r^2\dot{\theta}\,dt=\frac{1}{2}Ct,$$

所以首次积分 $r^2\dot{\theta}=C$ 说明卫星绕地心作平面运动时，在单位时间内扫过的面积等于常数. 这个重要结论就是力学上的开普勒(Kepler)第二定律.

为了便于求首次积分,有时把方程组(3)改写成形状为

$$\frac{dx_1}{f_1(t,x_1,\cdots,x_n)}=\frac{dx_2}{f_2(t,x_1,\cdots,x_n)}=\cdots=\frac{dx_n}{f_n(t,x_1,\cdots,x_n)}=\frac{dt}{1},$$

或更对称的形状

$$\frac{dx_1}{X_1(t,x_1,\cdots,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(t,x_1,\cdots,x_n)}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n(t,x_1,\cdots,x_n)}=\frac{dt}{X_0(t,x_1,\cdots,x_n)},$$

其中 $X_i=f_iX_0(i=1,2,\cdots,n)$. 这样就便于利用比例的性质进行讨论.

[例 4] 求解方程组

$$\frac{dx}{cy-bz}=\frac{dy}{az-cx}=\frac{dz}{bx-ay}. \tag{12}$$

解 因为

$$x(cy-bz)+y(az-cx)+z(bx-ay)=0$$

及

$$a(cy-bz)+b(az-cx)+c(bx-ay)=0,$$

而方程组(12)可化为

$$\frac{x\,dx}{x(cy-bz)}=\frac{y\,dy}{y(az-cx)}=\frac{z\,dz}{z(bx-ay)}=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{0}$$

及

$$\frac{a\,dx}{a(cy-bz)}=\frac{b\,dy}{b(az-cx)}=\frac{c\,dz}{c(bx-ay)}=\frac{a\,dx+b\,dy+c\,dz}{0},$$

因此

$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=0$$

及

$$a\,dx+b\,dy+c\,dz=0.$$

从而得到两个首次积分

$$x^2+y^2+z^2=C_1$$

及

$$ax+by+cz=C_2.$$

而且两者是互相独立的，所以

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=C_1, \\ ax+by+cz=C_2 \end{cases}$$

就是方程组(12)的通积分.

对于高阶方程组，也可以与一阶方程组完全类似地化成高阶方程或用首次积分的方法来求解.

[例 5] 求解方程组

$$\begin{cases} \ddot{x}=y, \\ \ddot{y}=x. \end{cases} \tag{13}$$

解 两式相加得

$$\frac{d^2(x+y)}{dt^2}=x+y,$$

从而

$$x+y=C_1e^t+C_2e^{-t} \tag{14}$$

两式相减，得到

$$\frac{d^2(x-y)}{dt^2}=-(x-y),$$

从而

$$x-y=C_3\cos t+C_4\sin t. \tag{15}$$

由(14)与(15)可得

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t), \\ y=\frac{1}{2}(C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t). \end{cases}$$

或写成更简洁的形状

$$\begin{cases} x=\gamma_1e^t+\gamma_2e^{-t}+\gamma_3\cos t+\gamma_4\sin t, \\ y=\gamma_1e^t+\gamma_2e^{-t}-\gamma_3\cos t-\gamma_4\sin t. \end{cases}$$

这就是方程组 (13) 的通解，其中 γ_1，γ_2，γ_3 和 γ_4 是四个任意常数.

在学过高阶线性方程(或组)的解法后，也可以把方程组(13)化成高阶方程来处理(还可以选用其他解法).

*三、关于首次积分的补充

为了加强首次积分在求解方程组过程中的理论指导，以及学习一阶偏微分方程的需要，这里介绍一些关于首次积分的知识，但仅叙述结论而不加证明.

首先，对首次积分的概念给以解析的定义.

定义 假设函数 $\psi(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$在区域 D 内有一阶连续偏导数，它不是常数，如果它沿着方程组(3)的任一解 $x_i=\varphi_i(t)$ ($i=1, 2, \cdots, n$; $\alpha<t<\beta$)都等于常数，即对于满足 $\alpha<t<\beta$ 内的每一点 t，函数 $\psi(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$都取同一常数值，那末，称关系式 $\psi(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)=C$ 为方程组(3)的*首次积分*(其中 C 是任意常数). 有时也称函数 $\psi(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$为方程组(3)的首次积分.

显然，本节第二段中首次积分的概念同这里定义的是一致的. 根据这个定义，假如 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_k$ 是方程组(3)的 k 个首次积分，那末，它们的任意连续可微函数 $\Phi(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_k)$也是方程组(3)的首次积分. 因此，一个方程组可以有无穷多个首次积分. 下面，介绍几个定理.

定理 1 假若函数 $\psi(t, x_1, \cdots, x_n)$不是常数，在区域 D 内有

连续的一阶偏导数，那末，函数 ψ 是方程组(3)的首次积分的充分和必要条件是：在区域 D 内成立着恒等式

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x_1}f_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}f_2+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}f_n\equiv 0. \tag{16}$$

这个定理指出了检验一个函数 ψ 是否为方程组(3)的首次积分的方法。

关系式　$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x_1}f_1+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}f_n=0$$

是以 ψ 为未知量的一阶线性偏微分方程，它与常微分方程组(3)密切相联．本书在第六章将应用定理1来求解这个偏微分方程．

定理2　假若已知方程组(3)的一个首次积分 $\psi(t, x_1, \cdots, x_n)=C$，那末可以使方程组(3)的求解问题转化为含 $n-1$ 个方程的方程组的求解问题。

转化的方法是：不妨假设 $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_n}\neq 0$，由

$$\psi(t, x_1, \cdots, x_n)=C$$

解出 x_n，得到函数

$$x_n=\omega(t, x_1, \cdots, x_{n-1}, C). \tag{17}$$

把它代入方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t, x_1, \cdots, x_n)\quad(i=1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

的前面 $n-1$ 个方程，得到含有 $n-1$ 个一阶方程的新方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t, x_1, \cdots, x_{n-1}, \omega(t, x_1, \cdots, x_{n-1}, C))$$
$$(i=1, 2, \cdots, n-1). \tag{18}$$

可以证明，如果函数 $x_j=\varphi_j(t, C)$ $(\alpha<t<\beta, j=1, 2, \cdots, n-1)$ 是方程组(18)的解，那末

$$x_j=\varphi_j(t, C)\quad(j=1, 2, \cdots, n-1)$$

和

$$x_n=\varphi_n(t)=\omega(t, \varphi_1(t, C), \cdots, \varphi_{n-1}(t, C)) \tag{19}$$

一起是方程组(3)的解。

同理，若已知方程组(3)的 k 个独立的首次积分 $(2\leqslant k\leqslant n-1)$

$$
\begin{aligned}
&\psi_1(t, x_1, \cdots, x_n)=C_1,\\
&\psi_2(t, x_1, \cdots, x_n)=C_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\psi_k(t, x_1, \cdots, x_n)=C_k.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

不妨假设可以从(20)解出后面 k 个变量

$$
\begin{cases}
x_{n-k+1}=\omega_1(t, x_1, \cdots, x_{n-k}, C_1, \cdots, C_k),\\
x_{n-k+2}=\omega_2(t, x_1, \cdots, x_{n-k}, C_1, \cdots, C_k),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n=\omega_k(t, x_1, \cdots, x_{n-k}, C_1, \cdots, C_k).
\end{cases}
$$

把它们代入方程组(3)的前面 $n-k$ 个方程，得到含有 $n-k$ 个未知量的一阶方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t, x_1, \cdots, x_{n-k}, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k),\\
\dfrac{dx_2}{dt}=f_2(t, x_1, \cdots, x_{n-k}, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{dx_{n-k}}{dt}=f_{n-k}(t, x_1, \cdots, x_{n-k}, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k).
\end{cases}
\tag{21}
$$

这样，求解方程组(3)的问题就等价于求解隐函数组(20)及方程组(21)的问题．依此类推，特别当 $k=n$ 时就有

定理3 假若 $\psi_j(t, x_1, \cdots, x_n)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 是方程组(3)的 n 个互相独立的首次积分，即

$$
\frac{D(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}=\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix}\neq 0,
\tag{22}
$$

那末，由关系式

$$\begin{cases}\psi_1(t, x_1, \cdots, x_n)=C_1,\\ \psi_2(t, x_1, \cdots, x_n)=C_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \psi_n(t, x_1, \cdots, x_n)=C_n\end{cases} \tag{23}$$

确定的隐函数组 $x_j=\varphi_j(t, C_1, \cdots, C_n)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 就是方程组(3)的解，亦即关系式(23)就是方程组(3)的通积分．其中 C_1, C_2, $\cdots$, C_n 是 n 个任意常数．

定理3说明，为了求解方程组(3)，只要找出它的 n 个互相独立的首次积分就行了．定理2和3从理论上说明首次积分对求解方程组的作用，这是用首次积分来求解方程组(3)的理论根据．

习 题

求解下列方程组(1～11)：

1. $\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{z+x}=\dfrac{dz}{x+y}$.

2. $\dfrac{dx}{y+1}=\dfrac{dy}{x+1}=\dfrac{dt}{t}$.

3. $\dfrac{dx}{yt}=\dfrac{dy}{xt}=\dfrac{dt}{x+y}$.

4. $\dfrac{dx}{x^2-y^2-t^2}=\dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dt}{2xt}$.

5. $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)}=\dfrac{dy}{-y(z^2+x^2)}=\dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

6. $\dfrac{dx}{x^2+y^2}=\dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dt}{(x+y)t}$.

7. $\dfrac{dx}{x(x+y)}=\dfrac{dy}{-y(x+y)}=\dfrac{dz}{(y-x)(2x+2y+z)}$.

8. $\dfrac{dx}{xt(xy+t^2)}=\dfrac{dy}{-yt(xy+t^2)}=\dfrac{dt}{x^4}$.

9. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x-y}{z-t}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x-y}{z-t}$, $\dfrac{dz}{dt}=x-y+1$.

10. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+xf'(t)-yg'(t)=0,\\ \dfrac{dy}{dt}+xg'(t)+yf'(t)=0.\end{cases}$

*11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x\cos\ln(t+1)+y\sin\ln(t+1), \\ \dfrac{dy}{dt}=x\sin\ln(t+1)+y\cos\ln(t+1). \end{cases}$

12. 试求满足下面条件的两条平面曲线:

1) 在两曲线上有相同横坐标的一对点处所引的切线相交在纵轴上,所引的法线相交于横轴上.

2) 其中一条曲线经过点(1, 1),另一条曲线经过点(1, 2).

13. 质量为 m 的一物体自高度 h 处下落,设阻力与物体的速度成正比,而物体下落的初速度为 v_0,方向与水平线成倾角 α. 试求物体运动的轨道.

14. 火炮以仰角 α 和初速度 v_0 发射

1) 求出炮弹的运动.

2) 试证炮弹的运动轨线是 $y=x\operatorname{tg}\alpha-\dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$,其中 g 是重力加速度.

*15. 质量同为 m 的两个小球,由轻弹簧联结,弹簧未拉长时的长度为 l_0,当它被拉长到长度为 l_1 时,这两个小球开始降落,两小球位于一条铅垂线上,经过 T 秒钟,弹簧又缩到 l_0,如果不计阻力,试求这两个小球的运动.

*§6 两体问题

牛顿在发明微积分的同时,研究了天体运动问题.在开普勒关于行星绕太阳运转的三定律的基础上,牛顿建立了万有引力定律.关于开普勒三定律和万有引力定律的关系,是微积分和常微分方程发展的重要应用实例.

开普勒三定律是:

第一定律: 行星沿椭圆轨道绕太阳运转,太阳位于椭圆的一个焦点上.

第二定律: 从太阳到行星的向量在单位时间扫过的面积是常数.

第三定律: 行星绕太阳运转周期的平方和椭圆轨道的长半轴立方成正比.

牛顿万有引力定律是: 两个天体之间具有吸引力,吸引力与两个天体的距离平方成反比,与它们的质量乘积成正比,即

$$F=-\frac{GmM}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r},\tag{1}$$

这里 m 和 M 是两个天体的质量，r 是它们的距离，$\boldsymbol{r}$ 是从恒星到行星的向量，G 是比例常数，称为万有引力常数.

从开普勒三定律导出万有引力定律是微分学和牛顿力学的内容，本书不赘述. 关于从牛顿万有引力定律推出开普勒三定律，我们论述如下.

设太阳的质量为 M，行星的质量为 m. 由于太阳系中行星的总质量远小于 M，所以我们忽略其它行星的作用，同时认为太阳是静止的. 这是一种近似. 从而若把坐标系的原点取在太阳上，那末成一惯性坐标系. 根据牛顿第二定律和万有引力定律，得行星的运动方程是

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\frac{GmM}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

即

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\frac{GM\boldsymbol{r}}{r^3}.\tag{1}$$

如果考虑到行星 m 对太阳 M 的引力使太阳做加速运动，从而坐标系不是惯性系而是相对坐标，那末行星的运动方程是

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\frac{G(m+M)}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r},\tag{2}$$

即在 m 较 M 很小时，可以用(1)代替(2). 记 $\mu=G(m+M)$，x、y 和 z 表示行星的相对坐标，得常微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-\frac{\mu x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=-\frac{\mu y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=-\frac{\mu z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.\end{aligned}\tag{3}$$

用 $\boldsymbol{r}$ 与(2)做向量积，因 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$，所以

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{0},$$

即
$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=\mathbf{0},$$
从而
$$\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{C}\text{（常向量）}.$$
它表明 $\boldsymbol{r}$ 位于一个平面中。或者，用 z 乘(3)的第二式和用 y 乘(3)的第三式相减，得到
$$z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}\right)=0,$$
即
$$z\dot{y}-y\dot{z}=A\text{（常数）}\tag{4}$$
同理可得
$$x\dot{z}-z\dot{x}=B,\tag{5}$$
$$y\dot{x}-x\dot{y}=C.\tag{6}$$

由(4)乘 x，(5)乘 y 和(6)乘 z 相加得到
$$Ax+By+Cz=0,$$
即行星运行轨道位于过太阳的一个平面。取该平面为(x, y)坐标平面，那末描述行星位置的坐标只要 x 和 y，而运动方程是
$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-\frac{\mu x}{(x^2+y^2)^{3/2}},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=-\frac{\mu y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.\end{aligned}\tag{7}$$

用 y 乘第一式与用 x 乘第二式相加，得到
$$\frac{d}{dt}(y\dot{x}-x\dot{y})=0,$$
即
$$y\dot{x}-x\dot{y}=C_1\tag{8}$$
是(7)的一个首次积分。

用 $2\dot{x}$ 乘(7)的第一式和 $2\dot{y}$ 乘(7)的第二式相加，得到
$$2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y}=-\frac{2\mu(x\dot{x}+y\dot{y})}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$
即
$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=2\mu\frac{d}{dt}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$
所以
$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\mu(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}+C_2\tag{9}$$

是(7)的另一个首次积分.

为进一步讨论,引进极坐标

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,$$

那末

$$\dot{x}=\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)\frac{d\theta}{dt},$$

$$\dot{y}=\left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta\right)\frac{d\theta}{dt}.$$

代入(8)式得到

$$-r^2\frac{d\theta}{dt}=C_1. \tag{10}$$

我们知道 $\frac{1}{2}r^2d\theta$ 是半径为 r 夹角为 $d\theta$ 的扇形面积,所以

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

表示向量 r 在单位时间扫过的面积, (10)式表明它是常数 $\frac{C_1}{2}$. 这样,我们得到了开普勒第二定律.

把 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 的表达式代入(9),得到

$$\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right\}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2\mu}{r}+C_2,$$

再把(10)代入上式得到

$$\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right\}\frac{C_1^2}{r^4}=\frac{2\mu}{r}+C_2,$$

即

$$\left\{\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right\}=\frac{1}{C_1^2}\left\{C_2+\frac{2\mu}{r}\right\}.$$

置 $\frac{1}{r}=u$, 得到

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2=\frac{1}{C_1^2}\{C_2+2\mu u\},$$

即

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{C_1}\sqrt{C_2+2\mu u-C_1^2u^2}.$$

从而得到

$$d\theta=\frac{du}{\sqrt{\frac{C_2}{C_1^2}+2\frac{\mu}{C_1^2}u-u^2}}=\frac{du}{\sqrt{\frac{C_2}{C_1^2}+\frac{\mu^2}{C_1^4}-\left(u-\frac{\mu}{C_1^2}\right)^2}}. \tag{11}$$

如果 $\frac{C_2}{C_1^2}+\frac{\mu^2}{C_1^4}\leqslant 0$, 上式无意义,所以总设

$$\frac{C_2}{C_1^2}+\frac{\mu^2}{C_1^4}>0.$$

积分(11)式得到

$$\theta-\theta_0=\arcsin\left\{\left(u-\frac{\mu}{C_1^2}\right)\Big/\left(\frac{C_2}{C_1^2}+\frac{\mu^2}{C_1^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

这里 θ_0 为任意常数. 因此

$$\frac{1}{r}=u=\frac{\mu}{C_1^2}+\left(\frac{C_2}{C_1^2}+\frac{\mu^2}{C_1^4}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(\theta-\theta_0).$$

若记

$$p=\frac{C_1^2}{\mu},\ e_1=\left(1+\frac{C_2C_1^2}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}},\tag{12}$$

那末,得到行星运行轨道方程

$$r=\frac{p}{1+e_1\sin(\theta-\theta_0)}.\tag{13}$$

当 $0\leqslant e_1<1$ 时,它是椭圆,以坐标原点为焦点,e_1 是离心率,且椭圆的长半轴 a 与 p、e_1 的关系是

$$p=a(1-e_1^2).\tag{14}$$

当 $e_1=1$ 时,它是以坐标原点为焦点的抛物线.

当 $e_1>1$ 时,它是以坐标原点为焦点的双曲线的一支.

这就是开普勒第一定律. 即轨道是圆锥曲线. 观测到的行星轨道是椭圆,这时 $0\leqslant e_1<1$. 又椭圆的短半轴 $b=a\sqrt{1-e_1^2}$,所以椭圆面积为

$$\pi ab=\pi a^2\sqrt{1-e_1^2},$$

根据式(10)我们得到运行周期 T 为

$$T=\frac{\pi ab}{\frac{1}{2}|C_1|}=\frac{\pi a^2\sqrt{1-e_1^2}}{\frac{1}{2}|C_1|}.$$

但由(12)和(14)知

$$C_1^2=\mu p=\mu a(1-e_1^2),$$

即

$$|C_1|=\mu^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-e_1^2}.$$

所以
$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\cdot a^{\frac{3}{2}},$$

从而
$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{\mu}=\frac{4\pi^2}{G(m+M)}.$$

如果 m 与 M 之比很小，那末
$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM}.$$
这是开普勒第三定律.

这就是说，万有引力定律包括了开普勒三定律. 它反映了行星运行的牛顿力学原理，能够解释当时对太阳系观测到的现象.

但是，太阳系并不是只有一个行星，而有九大行星. 在较长的时间内，只观察到六个行星. 后来发现了天王星，但是对天王星的观测表明，它的轨道并不是一个椭圆. 人们把其它六个行星对它的影响也作为摄动项计算进去，仍不能很好地解释它的轨道. 有人大胆地假设太阳系在天王星外面还有一颗行星，并假设它的轨道，考察它对天王星的摄动影响，而预告它的位置，终于发现了太阳系的第八颗大行星，而命名为海王星. 这是万有引力定律和摄动计算方法能很好地解释太阳系运动的范例.

然而，完整地求解多体问题的微分方程组是十分困难的问题. 人们在完满地解决了两体问题后，努力研究三体问题. 三体问题对常微分方程的发展影响十分深远. 微分方程定性理论就是法国数学家庞加莱(Poincaré)环绕三体问题而创立的. 目前关于限制性三体问题的研究取得的进展，都是与常微分方程理论的发展密切相关的.

空间技术的发展，推动人们研究人造卫星、宇宙飞船的运动规律.

运用两体问题的结果，可以讨论第一宇宙速度、第二宇宙速度和第三宇宙速度的问题. 我们建议读者去阅读有关著作.

第 二 章

常系数线性微分方程

§1 引 论

如果在常微分方程中未知函数和它的各阶导数都是一次地出现，就称这种方程为线性常微分方程. 如果线性微分方程中未知函数及其各阶导数的系数都是常数，就称为常系数线性微分方程. 这是一类能用初等方法求解的、而且应用也很广泛的常微分方程.

在下面的讨论中，要用到实变量 t 的复值函数，先介绍如下.

一、复值函数

如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是区间 $\alpha<t<\beta$ 内的实函数，$i=\sqrt{-1}$ 是虚数单位，就称 $x(t)\equiv\varphi(t)+i\psi(t)$ 为区间 $\alpha<t<\beta$ 内的复值函数.

如果实函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 $\alpha<t<\beta$ 内是连续的，就称 $x(t)$ 在区间 $\alpha<t<\beta$ 内是连续的；如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 $\alpha<t<\beta$ 内是可微的，就称 $x(t)$ 在区间 $\alpha<t<\beta$ 内是可微的，并且定义 $x(t)$ 的导数如下：

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d\varphi(t)}{dt}+i\frac{d\psi(t)}{dt}.$$

根据定义，容易证明：如果 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 可微，c 是常数，那末

$$\frac{d}{dt}\{x_1(t)+x_2(t)\}=\frac{dx_1(t)}{dt}+\frac{dx_2(t)}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\{cx_1(t)\}=c\frac{dx_1(t)}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\{x_1(t)x_2(t)\}=\frac{dx_1(t)}{dt}x_2(t)+x_1(t)\frac{dx_2(t)}{dt}.$$

并且还可以证明：等式

$$\frac{d}{dt}x_1(t)\equiv 0$$

的充要条件是 $x_1(t)\equiv c$(任意复常数).

如果 $x(t)\equiv\varphi(t)+i\psi(t)$ 在区间 $\alpha<t<\beta$ 内连续，那末定义 $x(t)$ 的积分为

$$\int_{t_0}^{t}x(s)ds=\int_{t_0}^{t}\varphi(s)ds+i\int_{t_0}^{t}\psi(s)ds,$$

这里 $\alpha<t_0,\ t<\beta$. 这时，容易证明：如果 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 在区间 $\alpha<t<\beta$ 内连续，那末

$$\int_{t_0}^{t}\{x_1(s)+x_2(s)\}ds=\int_{t_0}^{t}x_1(s)ds+\int_{t_0}^{t}x_2(s)ds,$$

$$\int_{t_0}^{t}cx_1(s)ds=c\int_{t_0}^{t}x_1(s)ds,$$

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}x_1(s)ds=x_1(t).$$

在本章特别有用的是指数函数. 设 θ 是实数，我们定义指数函数 $e^{i\theta}$ 如下：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta, \tag{1}$$

这时，$e^{i0}=1$, $e^{i\pi}=-1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$. 而

$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta,$$

从而得到

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}. \tag{2}$$

(1)、(2) 称为欧拉(Euler)公式.

当 λ 是复数 $\alpha+i\beta$ 时，我们定义 e^{λ} 为

$$e^{\lambda}=e^{\alpha+i\beta}=e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta). \tag{3}$$

容易证明 $$\overline{e^{\lambda}}=e^{\alpha-i\beta}=e^{\bar{\lambda}},$$

并且 $$e^{\lambda_1+\lambda_2}=e^{\lambda_1}\cdot e^{\lambda_2}.$$

事实上，若记 $\lambda_1=\alpha_1+i\beta_1$, $\lambda_2=\alpha_2+i\beta_2$, 那末根据定义有

$$\begin{aligned}e^{\lambda_1+\lambda_2}&=e^{\alpha_1+\alpha_2}\{\cos(\beta_1+\beta_2)+i\sin(\beta_1+\beta_2)\}\\&=e^{\alpha_1}\cdot e^{\alpha_2}(\cos\beta_1+i\sin\beta_1)(\cos\beta_2+i\sin\beta_2)\\&=e^{\lambda_1}\cdot e^{\lambda_2}.\end{aligned}$$

特别，当 $\lambda=\alpha+i\beta$ 时，

$$e^{\lambda t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t),$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{\lambda t})&=\alpha e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)+\beta e^{\alpha t}(-\sin\beta t+i\cos\beta t)\\&=(\alpha+i\beta)e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t),\end{aligned}$$

因此

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t})=\lambda e^{\lambda t}. \tag{4}$$

这是一个很有用的公式.

二、复的一阶常系数线性方程

设 λ 是复数，微分方程

$$\frac{dz}{dt}=\lambda z \tag{5}$$

称为复的一阶常系数线性方程. 根据前面知道，$ce^{\lambda t}$ 是它的解，其中 c 是任意复常数. 它也可以用积分因子法求解：因

$$\frac{d}{dt}\{e^{-\lambda t}z\}\equiv e^{-\lambda t}\left(\frac{dz}{dt}-\lambda z\right),$$

所以

$$\frac{d}{dt}\{e^{-\lambda t}z\}\equiv 0,$$

从而

$$e^{-\lambda t}z\equiv c\quad(\text{任意复常数}),$$

即

$$z=ce^{\lambda t} \tag{6}$$

是方程的通解. 若记 $\lambda=\alpha+i\beta$，$z=x+iy$，那末(5)可写成实的形式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\alpha x-\beta y,\\\frac{dy}{dt}&=\beta x+\alpha y.\end{aligned} \tag{7}$$

如果记 $c=re^{i\varphi}$，那末由(6)分出实部和虚部，就得到

$$\begin{aligned}x&=re^{\alpha t}\cos(\beta t+\varphi),\\y&=re^{\alpha t}\sin(\beta t+\varphi)\end{aligned}$$

是方程组(7)的通解，其中 r，φ 是两个实的任意常数.

三、基本性质

第一章§1的例7讨论单摆运动，它的近似方程是

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0,$$

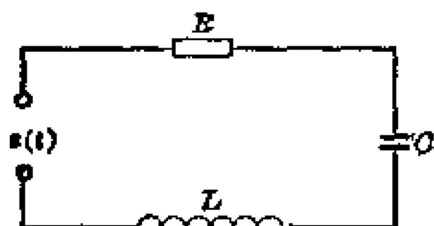


图 2.1

它是二阶常系数线性微分方程．又如由电阻 R、电容 C 和电感 L 串联组成的回路，如果外接电源的电势是 $e(t)$，回路电流为 $I(t)$，试求电容 C 两端的电势差 x 所满足的微分方程．根据欧姆定律和基尔霍夫定律得到

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int I\,dt=e(t),$$

若置
$$x=\frac{1}{C}\int I\,dt,$$

那末
$$C\frac{dx}{dt}=I,$$

所以
$$LC\frac{d^2x}{dt^2}+RC\frac{dx}{dt}+x=e(t).\tag{8}$$

它是二阶微分方程，由于 x、$\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 在其中是一次地出现，所以是二阶线性方程．又它的系数 LC、RC 和 1 是常数，所以 LRC 回路的方程是一个二阶常系数线性微分方程．一般的二阶常系数线性微分方程是

$$a_0\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t),\tag{9}$$

这里 a_0、a_1 和 a_2 是常数，$a_0\neq0$，$f(t)$是自变量 t 的已知函数，称为非齐次项，也叫强迫项．当 $f(t)\equiv0$ 时，它是二阶常系数齐次线性微分方程

$$a_0\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=0.\tag{10}$$

而方程(9)称为非齐次线性方程．

显然 $x=0$ 是齐次线性微分方程(10)的解．如果 $x=\varphi_1(t)$ 和

$x=\varphi_2(t)$都是齐次方程(10)的解，那末

$$x=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$$

也是方程(10)的解，这里c_1和c_2是任意常数．这称为迭加原理．

如果$x=\psi(t)$是非齐次线性微分方程(9)的解，$x=\varphi(t)$是齐次线性微分方程(10)的解，那末容易验证$x=\varphi(t)+\psi(t)$也是非齐次方程(9)的解．设$x=\psi_1(t)$和$x=\psi_2(t)$都是非齐次方程(9)的解，那末$x=\psi_1(t)-\psi_2(t)$是齐次线性方程(10)的解．

如果在(9)和(10)中，a_0、a_1和a_2是t的已知函数，$a_0(t)\neq0$，我们称

$$a_0(t)\frac{d^2x}{dt^2}+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_2(t)x=f(t)$$

是二阶变系数非齐次线性微分方程．当非齐次项$f(t)\equiv0$时，得到齐次线性微分方程

$$a_0(t)\frac{d^2x}{dt^2}+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_2(t)x=0.$$

这时，解的迭加原理仍然成立．对于n阶线性微分方程

$$L_n(t)x\equiv a_0(t)\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f(t)\quad(11)$$

和

$$L_n(t)x\equiv a_0(t)\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=0,\quad(12)$$

迭加原理也成立，即，如果$x=\varphi_1(t)$和$x=\varphi_2(t)$是(12)的解，那末$x=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$也是(12)的解，这里$c_1$和$c_2$是常数；如果$x=\varphi(t)$是(12)的解，$x=\psi(t)$是(11)的解，那末$x=\varphi(t)+\psi(t)$也是(11)的解；如果$x=\psi_1(t)$和$x=\psi_2(t)$都是(11)的解，那末$x=\psi_1(t)-\psi_2(t)$是(12)的解．

下面，我们先讨论二阶常系数线性微分方程的求解方法，再讨论n阶常系数线性微分方程的求解方法．

习　题

1．求解微分方程$\frac{dz}{dt}=z^2+iz$，并导出微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=-y+x^2-y^2,\ \frac{dy}{dt}=x+2xy$$

的解.

2. 求解常微分方程组

$$\frac{dz_1}{dt}=\lambda_1 z_1,\ \frac{dz_2}{dt}=\lambda_1 z_2+z_1,$$

这里 λ_1 是复值常数.

3. 设复值函数 $z(t)$ 和 $w(t)$ 在区间 $\alpha<t<\beta$ 内是可微的，试证：

1) $\frac{d}{dt}\overline{z(t)}=\overline{\frac{dz(t)}{dt}}$;

2) $\frac{d}{dt}\{z^n(t)\}=nz^{n-1}(t)\frac{dz}{dt}$;

3) $\frac{d}{dt}|z(t)|^2=2\mathrm{Re}\{\dot{z}(t)\overline{z(t)}\}$;

4) $\frac{d}{dt}\left\{\frac{z(t)}{w(t)}\right\}=\frac{\dot{z}(t)w(t)-z(t)\dot{w}(t)}{w^2(t)}$　(假设 $w(t)\neq 0$).

4. 设 t 是实值变量，λ 是一复值常数，$p(t)$是 t 的复系数多项式，试证：

1) 当且仅当 $\mathrm{Re}\lambda<0$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}|p(t)e^{\lambda t}|=0$;

2) 当 $\mathrm{Re}\lambda>0$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}|p(t)e^{\lambda t}|=+\infty$;

3) 当且仅当 $\mathrm{Re}\lambda\leqslant 0$ 时，$e^{\lambda t}$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上是有界的.

§2　二阶常系数线性微分方程

一、二阶齐次常系数线性微分方程的求解

现在来研究

$$a_0\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=0 \tag{1}$$

的求解方法，这里 $a_0\neq 0$、a_1 和 a_2 是复值常数.

我们知道一阶常系数齐次线性微分方程

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x$$

的通解是 $x=ce^{\lambda t}$. 因此，我们先尝试讨论(1)的指数型的解 $x=e^{\lambda t}$，代入(1)得

$$(a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2)e^{\lambda t}=0,$$

所以，如果 λ 是二次代数方程

$$a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0 \tag{2}$$

的根，那末 $x=e^{\lambda t}$ 是微分方程(1)的解，反之也对．我们称二次代数方程(2)是线性微分方程(1)的特征方程．

如果 λ_1 和 λ_2 是特征方程(2)的两个不同的根，那末 $e^{\lambda_1 t}$ 和 $e^{\lambda_2 t}$ 都是二阶常系数线性方程(1)的解，根据迭加原理得到

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t} \tag{3}$$

是(1)的解，其中 c_1 和 c_2 是两个任意复值常数．它们是否是(1)的全部解？现在就来讨论这一问题．

设 λ_1 和 λ_2 是特征方程(2)的两个根，那末

$$a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=a_0(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=0.$$

我们可以写常系数微分方程(1)为

$$a_0\left\{\frac{d^2x}{dt^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\frac{dx}{dt}+\lambda_1\lambda_2x\right\}=0, \tag{4}$$

组合一下可写为

$$a_0\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}-\lambda_1x\right)-\lambda_2\left(\frac{dx}{dt}-\lambda_1x\right)\right\}=0.$$

若置
$$y=\frac{dx}{dt}-\lambda_1x,$$

那末得
$$\frac{dy}{dt}-\lambda_2y=0,$$

从而 $y=c_2'e^{\lambda_2 t}$，即

$$\frac{dx}{dt}-\lambda_1x=c_2'e^{\lambda_2 t}, \tag{5}$$

这里 c_2' 是任意的复值常数．

同样，若置

$$z=\frac{dx}{dt}-\lambda_2x,$$

那末 $z=c_1'e^{\lambda_1 t}$，即

$$\frac{dx}{dt}-\lambda_2x=c_1'e^{\lambda_1 t}. \tag{6}$$

因此，当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，由(6)式减去(5)式得

$$x=\frac{c_1'}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t}+\frac{c_2'}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 t}, \tag{7}$$

所以(1)的解都可表成(3)的形状。

如果 $\lambda_1=\lambda_2$，我们只能得到

$$\frac{dx}{dt}-\lambda_1 x=c_2' e^{\lambda_1 t},\tag{8}$$

两端乘以 $e^{-\lambda_1 t}$ 得到

$$\frac{d}{dt}\{e^{-\lambda_1 t}x\}=c_2',$$

因此

$$e^{-\lambda_1 t}x=c_1+c_2' t,\tag{9}$$

即，当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，

$$x=(c_1+c_2 t)e^{\lambda_1 t}\tag{10}$$

是方程(1)的全部解。这样得到

定理 1 如果(1)的特征方程

$$a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$$

的两个根 λ_1 和 λ_2 是不同的，那末

$$x=c_1 e^{\lambda_1 t}+c_2 e^{\lambda_2 t}\tag{11}$$

是二阶常系数线性方程(1)的全部解；如果(1)的特征方程(2)有重根 $\lambda_1=\lambda_2$，那末

$$x=(c_1+c_2 t)e^{\lambda_1 t}\tag{12}$$

是微分方程(1)的全部解。这里 c_1 和 c_2 是两个任意常数。

[例 1] 试求方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0\tag{13}$$

的全部解。

解 它的特征方程是

$$\lambda^2+\frac{g}{l}=0,$$

有一对共轭的纯虚根 $\pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$，因此(13)的全部复值解是

$$x=c_1 e^{i\omega t}+c_2 e^{-i\omega t},$$

这里 $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$，$c_1$ 和 c_2 是两个任意的复值常数。

但是，方程(13)是实系数的微分方程，我们希望求出它的实值解，要求 $\bar{x}(t)\equiv x(t)$，即 $x(t)$ 的共轭

$$\bar{x}(t)=\bar{c}_1e^{-i\omega t}+\bar{c}_2e^{i\omega t}$$

应与 $x(t)$ 相等，

$$\bar{c}_1e^{-i\omega t}+\bar{c}_2e^{i\omega t}\equiv c_1e^{i\omega t}+c_2e^{-i\omega t},$$

因此
$$(c_1-\bar{c}_2)e^{i\omega t}+(c_2-\bar{c}_1)e^{-i\omega t}\equiv 0.$$

从而
$$(c_1-\bar{c}_2)+(c_2-\bar{c}_1)e^{-2i\omega t}\equiv 0,$$

对 t 求导得
$$-2\omega(c_2-\bar{c}_1)ie^{-2i\omega t}\equiv 0.$$

所以 $c_2=\bar{c}_1$，因此实值解应是

$$x=c_1e^{i\omega t}+\bar{c}_1e^{-i\omega t},$$

若记 $c_1=\dfrac{1}{2}(A-iB)$，这里 A 和 B 是两个实值常数，那末

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

即
$$x=A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

一般地，若二阶线性常微分方程(1)的系数 a_0、a_1 和 a_2 是实数，那末它的特征方程(2)的根 λ_1 和 λ_2 可能有以下三种情况：

(i) 当 $a_1^2-4a_0a_2>0$ 时，$\lambda_1\neq\lambda_2$，是两个不相等的实数；

(ii) 当 $a_1^2-4a_0a_2<0$ 时，$\lambda_1=\bar{\lambda}_2$ 是一对共轭的复数；

(iii) 当 $a_1^2-4a_0a_2=0$ 时，$\lambda_1=\lambda_2$ 是两个相等的实数.

这时有下述定理.

定理 2 如果二阶方程(1)的系数 a_0、a_1 和 a_2 是实数，λ_1 和 λ_2 是特征方程(2)的两个根，那末

1° 当 $a_1^2-4a_0a_2>0$ 时，方程(1)的实值通解是

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t};$$

2° 当 $a_1^2-4a_0a_2=0$ 时，方程(1)的实值通解是

$$x=(c_1+c_2t)e^{\lambda_1 t};$$

3° 当 $a_1^2-4a_0a_2<0$ 时，λ_1 和 λ_2 是一对共轭的复数，设 $\lambda_1=\alpha+i\beta$，那末方程(1)的实值通解是

$$x=e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t),$$

这里 c_1 和 c_2 是两个任意的实值常数.

只需证明 3°, 我们留给读者作为习题来完成.

[例 2]　求齐次方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$ 的实值解.

解　它的特征方程是

$$\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0,$$

所以它的通解是

$$x=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t},$$

这里 c_1 和 c_2 是两个实值常数.

[例 3]　求齐次方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+2x=0$ 的实值解.

解　它的特征方程是

$$\lambda^2+2\lambda+2=(\lambda+1)^2+1=0,$$

它的特征根是 $-1+i$ 和 $-1-i$, 所以它的实值通解是

$$x=(c_1\cos t+c_2\sin t)e^{-t}.$$

我们从齐次线性方程(1)的通解表达式中看到,它含有两个任意常数. 例如对单摆运动的近似微分方程,它的解

$$\theta=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t \tag{14}$$

表示周期为 $\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 的周期运动. 为了具体决定它的一种运动过程, 需给出 $t=0$ 时 θ 及 $\dot{\theta}$ 的值 θ_0 和 $\dot{\theta}_0$(初始位置和初始角速度), 即要求

$$\theta(0)=\theta_0,\ \dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0, \tag{15}$$

由(14)得

$$\theta(0)=c_1=\theta_0,$$

$$\dot{\theta}(0)=c_2\omega=\dot{\theta}_0,$$

所以满足条件(15)的解是

$$\theta=\theta_0\cos\omega t+\frac{\dot{\theta}_0}{\omega}\sin\omega t.$$

条件(15)称为初值条件.

一般地, 对于二阶常系数线性方程(1), 若给定两个数 x_0 和 $\dot{x}_0$, 寻求(1)满足条件

$$x(0)=x_0 \quad 和 \quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0 \tag{16}$$

的解，称为初值问题，条件(16)称为初值条件，x_0 和 $\dot{x}_0$ 称为初值。

定理 3 二阶常系数线性方程(1)的初值问题的解存在且唯一。

证 若特征方程的根为 λ_1 和 λ_2, $\lambda_1\neq\lambda_2$, 那末(1)的复值通解为

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}.$$

根据初值条件来决定常数 c_1 和 c_2:

$$x(0)=c_1+c_2=x_0,$$

$$\dot{x}(0)=\lambda_1c_1+\lambda_2c_2=\dot{x}_0,$$

这时可唯一决定 $c_1=(x_0\lambda_2-\dot{x}_0)/(\lambda_2-\lambda_1)$, $c_2=(x_0\lambda_1-\dot{x}_0)/(\lambda_1-\lambda_2)$. 从而得到

$$x=\frac{x_0\lambda_2-\dot{x}_0}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_1 t}+\frac{x_0\lambda_1-\dot{x}_0}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_2 t}.$$

当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，由表达式

$$x=(c_1+c_2t)e^{\lambda_1 t}$$

根据条件(16)得

$$c_1=x_0,$$

$$c_1\lambda_1+c_2=\dot{x}_0,$$

所以满足初值条件(16)的特解是

$$x=[x_0+(\dot{x}_0-\lambda_1x_0)t]e^{\lambda_1 t}.$$

二、二阶非齐次常系数线性方程的求解

二阶非齐次常系数线性方程

$$a_0\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t) \tag{17}$$

的求解方法和齐次的类似. 设 λ_1 和 λ_2 是特征方程

$$a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$$

的两个不同的根，这时 $a_0\neq0$. 置

$$y=\frac{dx}{dt}-\lambda_1x, \tag{18}$$

得到
$$a_0\left\{\frac{dy}{dt}-\lambda_2 y\right\}=f(t),$$
即
$$\frac{d}{dt}\{e^{-\lambda_2 t}y\}=\frac{1}{a_0}f(t)e^{-\lambda_2 t},$$
从而
$$y=c_2' e^{\lambda_2 t}+\frac{1}{a_0}\int_0^t e^{\lambda_2(t-s)}f(s)\,ds, \tag{19}$$
c_2' 是任意常数. 同样, 若置
$$z=\frac{dx}{dt}-\lambda_2 x, \tag{20}$$
得到
$$z=c_1' e^{\lambda_1 t}+\frac{1}{a_0}\int_0^t e^{\lambda_1(t-s)}f(s)\,ds \tag{21}$$

(21)式减去(19)式, 并除以 $\lambda_1-\lambda_2$ 得到
$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\frac{1}{a_0}\int_0^t\frac{e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1-\lambda_2}f(s)\,ds, \tag{22}$$
这里 $c_1=c_1'/(\lambda_1-\lambda_2)$, $c_2=c_2'/(\lambda_2-\lambda_1)$是两个任意的复值常数. 我们称(22)为非齐次常系数线性微分方程(17)的常数变易公式. 若置
$$k(t)=\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}, \tag{23}$$
那末(22)成为
$$x(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\int_0^t k(t-s)\frac{f(s)}{a_0}\,ds.$$

由上式看出, 非齐次方程的解由两部份迭加而成: 一是齐次方程的通解
$$c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t},$$
另一是非齐次方程的一个特解
$$x=\frac{1}{a_0}\int_0^t k(t-s)\,f(s)\,ds. \tag{24}$$
这一事实, 我们在 §1 中已作了论述, 现在更具体了.

再由 $k(t)$的表达式(23)知, $k(t)$是齐次方程的解, 并且满足条件
$$k(0)=0,\quad \dot{k}(0)=1, \tag{25}$$

反之，如果 $k(t)$ 是齐次方程的解，满足初值条件(25)，那末(24)所表示的函数是非齐次方程(17)的解．事实上，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{a_0}\int_0^t\frac{dk(t-s)}{dt}f(s)ds,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{a_0}f(t)+\frac{1}{a_0}\int_0^t\frac{d^2k(t-s)}{dt^2}f(s)ds,$$

从而

$$a_0\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t)+\frac{1}{a_0}\int_0^t\left\{a_0\frac{d^2k(t-s)}{dt^2}+a_1\frac{dk(t-s)}{dt}+a_2k(t-s)\right\}f(s)ds$$

所以得到
$$a_0\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t).$$

由上所述，我们为了求非齐次方程(17)的解，应求出与它相应的齐次方程的通解，再求出非齐次方程的一个特解，而这个特解在求出齐次方程满足初值条件(25)的解 $k(t)$ 后，代入公式(24)确定．这就是说，求解齐次方程(1)是求非齐次方程(17)解的基础．

［例 4］ 试求方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=A\sin\omega t$$

的解，这里 ω_0、ω 和 A 是正的常数．

解 它的特征方程

$$\lambda^2+\omega_0^2=0$$

具有一对共轭的纯虚根 $\lambda_1=i\omega_0$，$\lambda_2=-i\omega_0$，根据公式(22)得

$$x=c_1e^{i\omega_0t}+c_2e^{-i\omega_0t}+\int_0^t\frac{e^{i\omega_0(t-s)}-e^{-i\omega_0(t-s)}}{i\omega_0-(-i\omega_0)}A\sin\omega s\,ds,$$

所以
$$x=B\cos\omega_0t+C\sin\omega_0t+A\int_0^t\frac{\sin\omega_0(t-s)}{\omega_0}\sin\omega s\,ds,$$

这里 B 和 C 是两个实值的任意常数．由于

$$\sin\omega_0(t-s)\sin\omega s=\frac{1}{2}\{\cos(\omega_0(t-s)-\omega s)-\cos(\omega_0(t-s)+\omega s)\},$$

当 $\omega_0\neq\omega$ 时，

$$\int_0^t \sin\omega_0(t-s)\sin\omega s\,ds$$

$$=\frac{-1}{2(\omega_0+\omega)}\sin(\omega_0(t-s)-\omega s)\Big|_0^t$$

$$-\frac{1}{2(\omega-\omega_0)}\sin(\omega_0(t-s)+\omega s)\Big|_0^t$$

$$=\frac{1}{2(\omega_0+\omega)}(\sin\omega t+\sin\omega_0 t)$$

$$+\frac{1}{2(\omega_0-\omega)}(\sin\omega t-\sin\omega_0 t),$$

所以

$$x=B\cos\omega_0 t+\left(C+\frac{A\omega}{\omega_0(\omega^2-\omega_0^2)}\right)\sin\omega_0 t+\frac{A}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t;$$

当 $\omega_0=\omega$ 时,

$$\int_0^t \sin\omega(t-s)\sin\omega s\,ds=\frac{1}{2\omega}\sin\omega t-\frac{t}{2}\cos\omega t,$$

所以 $x=B\cos\omega t+\left(C+\frac{A}{2\omega^2}\right)\sin\omega t-\frac{t}{2\omega}A\cos\omega t.$

[例 5] 试求 RLC 回路方程当 $\varepsilon(t)=E_0\sin\omega t$ 时的解。

解 根据§1(8), 它的方程是

$$LC\frac{d^2x}{dt^2}+RC\frac{dx}{dt}+x=E_0\sin\omega t.$$

若记 $\omega_0^2=1/LC$, $2\beta=RC\omega_0$, 那末上式化为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\omega_0\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\omega_0^2E_0\sin\omega t. \tag{26}$$

它表征了在交流电源 $E_0\sin\omega t$ 作用下电容 C 的电势变化规律. ω_0 称为该回路的固有圆频率, β 称为衰减系数或阻尼系数.

(26)的特征方程是

$$\lambda^2+2\beta\omega_0\lambda+\omega_0^2=0.$$

当 $\beta^2<1$ 时, 特征方程有一对共轭的复根

$$\lambda_1=-\beta\omega_0+i\sqrt{1-\beta^2}\,\omega_0,\quad \lambda_2=-\beta\omega_0-i\sqrt{1-\beta^2}\,\omega_0,$$

齐次微分方程的通解是

$$x=e^{-\beta\omega_0 t}(A\cos\sqrt{1-\beta^2}\,\omega_0 t+B\sin\sqrt{1-\beta^2}\,\omega_0 t),$$

其中 A 和 B 是两个任意的实常数.

齐次方程适合条件 $k(0)=0$, $\dot{k}(0)=1$ 的解

$$k(t)=\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\beta^2}\,\omega_0}\sin\sqrt{1-\beta^2}\,\omega_0 t,$$

所以方程(26)具有特解

$$x=\frac{\omega_0 E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\int_0^t e^{-\beta\omega_0(t-s)}\sin(\sqrt{1-\beta^2}\,\omega_0(t-s))\sin\omega s\,ds$$

$$=(\widetilde{A}\cos\sqrt{1-\beta^2}\,\omega_0 t+\widetilde{B}\sin\sqrt{1-\beta^2}\,\omega_0 t)e^{-\beta\omega_0 t}$$

$$+\frac{E_0\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega_0^2\omega^2}\{(\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t$$

$$-2\beta\omega\omega_0\cos\omega t\},$$

其中 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$ 是常数. 因此方程(26)具有周期为 $2\pi/\omega$ 的特解

$$x=\frac{E_0\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega_0^2\omega^2}\{(\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t-2\beta\omega\omega_0\cos\omega t\}.$$

为求得上述特解,我们需要计算指数函数与三角函数乘积的积分. 在下节我们将用另外的方法求出它, 所以这里没有详述求定积分的过程.

习　题

1. 求下列方程的实值通解和复值通解:

1) $\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$;　　2) $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}=0$;

3) $\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+4x=0$;　　4) $\frac{d^2x}{dt^2}-6\frac{dx}{dt}+8x=0$;

5) $4\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+x=0$;　　6) $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=0$;

7) $\frac{d^2x}{dt^2}+5x=1$;　　8) $-2\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}-x=0$;

9) $\frac{d^2x}{dt^2}+ix=0$.

2. 设 a_0、a_1、a_2、x_0 和 $\dot{x}_0$ 都是实数, $a_0\neq 0$, 试证: 初值问题

$$a_0\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=0,$$

$$x(t_0)=x_0,\ \dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$$

的解存在唯一, 这里 t_0 是给定的任一实数.

3．试求第1题中1)、3)、8)的满足初值条件

$$x(1)=0,\ \dot{x}(1)=1$$

的解．

4．求解下列微分方程：

1) $\dfrac{d^3y}{dx^3}-2\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=0$；　　2) $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2-x^2=0$；

3) $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+2x\dfrac{d^2x}{dt^2}-\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+x^2=0$；

4) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+4\left(\dfrac{dy}{dt}\right)+3=0$ （提示：设 $x=e^y$）；

5) $\dfrac{d^2y}{dt^2}\cos y-\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\sin y+\sin y=0$ （提示：设 $x=\sin y$）；

6) $2t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}-t\dfrac{dx}{dt}+x=0$ （提示：设 $t=e^\tau$）；

7) $\dfrac{d^3x}{dt^3}-2\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dx}{dt}+2x=0$.

5．设 a_0、a_1 和 a_2 是实值常数，对于欧拉方程

$$a_0t^2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1t\frac{dx}{dt}+a_2x=0,$$

证明：如果 λ_1 和 λ_2 是二次方程

$$a_0\lambda(\lambda-1)+a_1\lambda+a_2=0$$

的两个根，则欧拉方程的解具有以下形状：

1° 若 λ_1 和 λ_2 是不相同的实数，则

$$x=c_1t^{\lambda_1}+c_2t^{\lambda_2};$$

2° 若 $\lambda_1=\lambda_2$，则

$$x=(c_1+c_2\ln|t|)t^{\lambda_1};$$

3° 若 $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$. （α, β 为实数，$\beta\neq0$），则

$$x=t^{\alpha}\{c_1\cos(\beta\ln|t|)+c_2\sin(\beta\ln|t|)\},$$

这里 c_1 和 c_2 是两个任意的常数．

6．试给出二阶齐次线性微分方程(1)的每一解当 $t\to+\infty$ 时都趋于零的充要条件．

7．设 $p(t)$ 是自变量 t 的多项式，试证：二阶常系数非齐次线性微分方程

$$a_0\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=p(t)$$

必存在一多项式形状的解．并由此求微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+5x=t-1$$

的全部实解．

8. 设 $p_1(t)$、$p_2(t)$、…、$p_m(t)$都是自变量 t 的复系数多项式，λ_1、λ_2、…、λ_m 及 λ 是 $m+1$ 个复值常数，试证：一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{dx}{dt}-\lambda x=p_1(t)e^{\lambda_1 t}+p_2(t)e^{\lambda_2 t}+\cdots+p_m(t)e^{\lambda_m t}$$

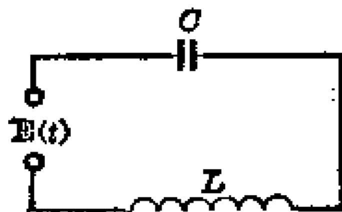
的通解可表示成形状

$$x=ce^{\lambda t}+q_1(t)e^{\lambda_1 t}+q_2(t)e^{\lambda_2 t}+\cdots+q_m(t)e^{\lambda_m t},$$

其中 c 是任意的复值常数，$q_1(t)$、$q_2(t)$、…、$q_m(t)$都是多项式，并且当 $\lambda_j\neq\lambda$ 时 $q_j(t)$的次数不高于 $p_j(t)$的次数，当 $\lambda_j=\lambda$ 时，$q_j(t)$的次数不高于 $p_j(t)$的次数加 1.

9. 试讨论二阶常系数齐次线性微分方程(1)具有非零的周期解的充要条件.

10. 讨论电容 C 和电感 L 的串联回路中的电流 $I(t)$.



11. 求下列方程的一个特解:

1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-6\dfrac{dx}{dt}+9x=\dfrac{9t^2+6t+2}{t^3}$;

2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+4x=t^2$;

3) $3\dfrac{d^2x}{dt^2}+12x=2\sin^2 t$;

4) $5\dfrac{d^2x}{dt^2}+5x=\sin t-\cos 2t$.

12. 求微分方程

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}-4t\frac{dx}{dt}+6x=t$$

的全部实值解.

*13. 设实系数的二次代数方程 $a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$ 的两个根的实部都小于 0，又设二阶连续可微的函数 $x(t)$ 满足

$$\lim_{t\to+\infty}\left\{a_0\frac{d^2x(t)}{dt^2}+a_1\frac{dx(t)}{dt}+a_2x(t)\right\}=0,$$

试证

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=0.$$

14. 设函数 $f(t)$在区间 $-\infty<t<+\infty$ 上连续，试求微分积分方程

$$\frac{dx}{dt}+2x(t)+\int_0^t x(s)ds=f(t)$$

的全部解，并给出确定唯一解的初值条件.

15. 设函数 $f(t)$在区间 $0<t<+\infty$ 中连续，试给出欧拉方程

$$a_0t^2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1t\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t)$$

在 $0<t<+\infty$ 中解的表达式.

16. 设函数 $f(t)$是周期为 ω 的连续函数，证明微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+x=f(t)$$

当 $\beta\neq0$ 时有且仅有一个周期为 ω 的解，并求出它的表达式.

§3 n 阶常系数线性微分方程

一、n 阶齐次常系数线性微分方程的求解

n 阶齐次常系数线性微分方程是

$$L_n(x)\equiv a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx=0, \tag{1}$$

这里 a_0、a_1、$\cdots$、a_n 是实值的常数，$a_0\neq0$.

欧拉指数函数法仍然可用. 试求(1)的形状如 $e^{\lambda t}$ 的解. 把 $e^{\lambda t}$ 代入(1)得到

$$(a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n)e^{\lambda t}=0,$$

从而有

$$\Delta(\lambda)\equiv a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0, \tag{2}$$

它是 n 次代数方程，称为微分方程(1)的特征方程. 因此得到：$e^{\lambda t}$ 是微分方程(1)的解的充要条件为 λ 是特征方程(2)的根.

因为特征方程(2)是 n 次的，它有 n 个根 λ_1、λ_2、$\cdots$、λ_n，称为(1)的特征根. 如果 λ_1、λ_2、$\cdots$、λ_n 是互不相同的，即 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,n)$都是(2)的单根，那末 e^{λ_1t}, e^{λ_2t}, $\cdots$, e^{λ_nt} 都是微分方程(1)的解，从而

$$x=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}+\cdots+c_ne^{\lambda_nt} \tag{3}$$

是微分方程(1)的解，其中 c_1、c_2、$\cdots$、c_n 是 n 个任意的复值常数. 问题在于(3)是否是(1)的全部解. 我们将证明它是正确的. 我们可

以证明更一般的定理.

定理 1 设 μ_1、μ_2、…、μ_s 是特征方程(2)的互不相同的根,它们的重数分别为 n_1、n_2、…、n_s, $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$, 那末

$$x=\sum_{j=1}^{s}(c_{j1}+c_{j2}t+\cdots+c_{jn_j}t^{n_j-1})e^{\mu_j t} \tag{4}$$

是微分方程(1)的全部解,其中 $c_{jk}(k=1, 2, \cdots, n_j;\ j=1, 2, \cdots, s)$ 是任意的复值常数.

在证明之前,先作些分析.

当 $n=1$ 时,它就是§1的结论.

当 $n=2$ 时,如果 $\mu_1\neq\mu_2$, 即 $s=2, n_1=n_2=1$, 那末表达式(4)成为

$$x=c_{11}e^{\mu_1 t}+c_{21}e^{\mu_2 t};$$

如果 $s=1$, $n_1=2$, 那末 μ_1 是一个二重根,表达式(4)成为

$$x=(c_{11}+c_{12}t)e^{\mu_1 t}.$$

这正是§2定理1的结论.

对于任意的 n, 如果 $s=n$, $n_1=n_2=\cdots=n_n=1$, 那末(4)就成为(3).

再来分析一下特征方程. 如果 μ_1 是特征方程的一个根,设

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n\equiv(\lambda-\mu_1)(a_0\lambda^{n-1}+b_1\lambda^{n-2}+\cdots+b_{n-1}),$$

那末

$$a_1=b_1-a_0\mu_1,\ a_2=b_2-b_1\mu_1,\ \cdots,\ a_{n-1}=b_{n-1}-b_{n-2}\mu_1,$$
$$a_n=-\mu_1 b_{n-1}. \tag{5}$$

置
$$L_{n-1}x\equiv a_0\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+b_1\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+b_{n-1}x,$$

$$L_n x\equiv a_0\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n x,$$

如果 $x(t)$ 具有 n 阶连续导函数,那末

$$L_{n-1}\left(\frac{dx}{dt}-\mu_1 x\right)\equiv L_n x. \tag{6}$$

事实上,我们有

$$
\begin{aligned}
L_{n-1}\left(\frac{dx}{dt}-\mu_1 x\right) &\equiv a_0\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{dx}{dt}-\mu_1 x\right) \\
&\quad + b_1\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}\left(\frac{dx}{dt}-\mu_1 x\right)+\cdots+b_{n-1}\left(\frac{dx}{dt}-\mu_1 x\right) \\
&\equiv a_0\frac{d^n x}{dt^n}+(b_1-a_0\mu_1)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \\
&\quad +\cdots+(b_{n-1}-b_{n-2}\mu_1)\frac{dx}{dt}+(-b_{n-1}\mu_1)x.
\end{aligned}
$$

根据等式(5)知上式右端就是 $L_n x$，因此得证(6)。

定理 1 的证明 运用数学归纳法来进行.

首先，$n=1$ 时定理成立，$n=2$ 时定理也成立.

其次，设定理对低于 n 阶的常系数齐次线性方程成立，来证明它对 n 阶常系数齐次线性方程也成立. 分两种情形进行.

第一种情形，特征方程(2)至少有两个不同的特征根 μ_1 和 μ_2. 根据等式(6)，若置

$$
y=\frac{dx}{dt}-\mu_1 x,
$$

则从 $L_n x=0$，推得

$$
L_{n-1}y=0.
$$

这方程的特征方程是

$$
a_0\lambda^{n-1}+b_1\lambda^{n-2}+\cdots+b_{n-1}=0,
$$

它的不同特征根是 μ_1、μ_2、$\cdots$、μ_s，并且它们的重数分别为 n_1-1、n_2、$\cdots$、n_s. 根据归纳法假设，定理对 $n-1$ 阶方程成立，所以

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}-\mu_1 x=y &=(c'_{11}+c'_{12}t+\cdots+c'_{1,n_1-1}t^{n_1-2})e^{\mu_1 t} \\
&\quad +(c'_{21}+c'_{22}t+\cdots+c'_{2n_2}t^{n_2-1})e^{\mu_2 t} \\
&\quad +\cdots+(c'_{s1}+c'_{s2}t+\cdots+c'_{sn_s}t^{n_s-1})e^{\mu_s t},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

这里 c'_{11}, c'_{12}, $\cdots$, c'_{1,n_1-1}, c'_{21}, $\cdots$, c'_{2n_2}, $\cdots$, c'_{sn_s} 是 $n-1$ 个任意的复值常数. 同样可证

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}-\mu_2 x &=(c''_{11}+c''_{12}t+\cdots+c''_{1n_1}t^{n_1-1})e^{\mu_1 t} \\
&\quad +(c''_{21}+c''_{22}t+\cdots+c''_{2,n_2-1}t^{n_2-2})e^{\mu_2 t}+\cdots \\
&\quad +(c''_{s1}+c''_{s2}t+\cdots+c''_{sn_s}t^{n_s-1})e^{\mu_s t},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

其中 $c''_{11}, c''_{12}, \cdots, c''_{1n_1}, c''_{21}, \cdots, c''_{2,n_2-1}, \cdots, c''_{sn_s}$ 是 $n-1$ 个任意的复值常数.

(8)式减去(7)式,并除以 $\mu_1-\mu_2$ 得到表达式(4).

第二种情形,特征方程(2)只有一个根 μ_1,是 n 重根. 这时,对于 $L_{n-1}y=0$,其特征方程以 μ_1 为 $n-1$ 重根,根据归纳法假设得

$$\frac{dx}{dt}-\mu_1 x=y=(c'_1+c'_2t+\cdots+c'_{n-1}t^{n-2})e^{\mu_1 t},$$

所以
$$\frac{d}{dt}\{e^{-\mu_1 t}x\}=(c'_1+c'_2t+\cdots+c'_{n-1}t^{n-2}),$$

积分得
$$e^{-\mu_1 t}x=\left(c_1+c'_1t+\frac{1}{2}c'_2t^2+\cdots+\frac{c'_{n-1}}{n-1}t^{n-1}\right),$$

即得
$$x=(c_1+c_2t+\cdots+c_nt^{n-1})e^{\mu_1 t},$$

其中 $c_j=\dfrac{c'_{j-1}}{j-1}$ $(j=2, \cdots, n)$是任意常数. 定理1证毕.

[例1] 求微分方程 $\dfrac{d^3x}{dt^3}+2\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dx}{dt}-2x=0$ 的全部解.

解 特征方程是

$$\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2=(\lambda^2-1)(\lambda+2)=0,$$

所以特征根为 $-2, -1, 1$,并且都是单根. 由此,微分方程的全部解是 $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-t}+c_3e^t$,其中 c_1, c_2 和 c_3 是三个任意常数.

[例2] 求解微分方程

$$\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-x=0.$$

解 它的特征方程是 $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3=0$, 它有一个三重根1,所以微分方程的全部解是

$$x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^t.$$

由定理1知,方程(1)的通解含有 n 个任意常数. 要确定一个特解,应当有 n 个初始条件. 例如,我们求例2中满足条件

$$x(0)=0,\ \dot{x}(0)=0,\ \ddot{x}(0)=1 \tag{9}$$

的解,由这三个条件得

$$x(0)=c_1=0,\quad \dot{x}(0)=c_1+c_2=0,\quad \ddot{x}(0)=c_1+2c_2+2c_3=1,$$

所以 $c_1=0$, $c_2=0$, $c_3=\dfrac{1}{2}$, 即所求的解是 $x=\dfrac{1}{2}t^2e^t$.

[例 3] 求解 $\frac{d^3y}{dt^3}+\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}-5y=0$.

解 显然1是它的特征方程 $\lambda^3+\lambda^2+3\lambda-5=0$ 的一个根，从而

$$\lambda^3+\lambda^2+3\lambda-5=(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+5)=0.$$

所以三个特征根是 1, $-1+2i$, $-1-2i$, 并且都是单根. 根据定理 1, 它的解可表示为 $x=c_1e^t+c_2e^{(-1+2i)t}+c_3e^{(-1-2i)t}$.

由于该例中方程的系数都是实数，我们希望求出它的实解. 这时类似于 § 2 定理 2 的结论 3°, 事实上，由于

$$\bar{c}_1e^t+\bar{c}_2e^{(-1-2i)t}+\bar{c}_3e^{(-1+2i)t}\equiv c_1e^t+c_2e^{(-1+2i)t}+c_3e^{(-1-2i)t},$$

上式两端除以 e^t, 并令 $t\to+\infty$, 得到 $\bar{c}_1=c_1$. 从而

$$(c_2-\bar{c}_3)e^{(-1+2i)t}=(\bar{c}_2-c_3)e^{(-1-2i)t},$$

所以 $\bar{c}_3=c_2$, 若置 $c_2=A-iB$, 那末得到例 3 的实解可表为

$$x=Ce^t+e^{-t}(A\cos 2t+B\sin 2t),$$

其中 A、B 和 C 是三个任意的实常数.

一般地，我们可以证明

定理 2 设方程(1)的系数 a_0、a_1、…、a_n 都是实数，它的特征方程(2)有 j 个不同的实根 μ_1、μ_2、…、μ_j, 它们的重数分别为 n_1、n_2、…、n_j, 还有 k 对不同的共轭复根 $\alpha_1\pm i\beta_1$、…、$\alpha_k\pm i\beta_k$, 它们的重数分别为 m_1、…、m_k, 且 $n_1+n_2+\cdots+n_j+2(m_1+m_2+\cdots+m_k)=n$, 那末微分方程(1)的实解 $x(t)$ 可表示成

$$\begin{aligned}x=&P_1(t)e^{\mu_1t}+\cdots+P_j(t)e^{\mu_jt}\\&+(Q_1(t)\cos\beta_1t+R_1(t)\sin\beta_1t)e^{\alpha_1t}\\&+\cdots+(Q_k(t)\cos\beta_kt+R_k(t)\sin\beta_kt)e^{\alpha_kt},\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $P_1(t)$、…、$P_j(t)$ 是次数分别为 n_1-1、…、n_j-1 的实系数多项式, $Q_l(t)$ 和 $R_l(t)$ $(l=1, 2, \cdots, k)$ 是 m_l-1 次的实系数多项式.

该定理的证明类似于 § 2 定理 2, 留给读者完成.

表达式(10)中共有 $n_1+n_2+\cdots+n_j+2(m_1+\cdots+m_k)=n$ 个任意的实值常数，它们是多项式的系数.

二、n 阶非齐次常系数线性方程的求解

n 阶非齐次常系数线性微分方程

$$L_n x \equiv a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = f(t), \tag{11}$$

其中 a_0、a_1、…、a_n 是常数，$a_0 \neq 0$，$f(t)$在开区间 $\alpha < t < \beta$ 内是已知的连续函数.

关于非齐次微分方程，下述迭加原理可用于简化求解问题.

定理3　设 $f_1(t)$和 $f_2(t)$在区间 $\alpha < t < \beta$ 内是连续的，$x_1(t)$和 $x_2(t)$分别是非齐次微分方程

$$L_n x = f_1(t) \quad 和 \quad L_n x = f_2(t)$$

的解，那末 $x(t) \equiv x_1(t) + x_2(t)$是下列非齐次方程的解：

$$L_n x = f_1(t) + f_2(t).$$

证　根据假设

$$a_0 \frac{d^n x_1(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_1(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x_1(t) \equiv f_1(t),$$

$$a_0 \frac{d^n x_2(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_2(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x_2(t) \equiv f_2(t).$$

两式相加得到

$$L_n\{x_1(t) + x_2(t)\} \equiv f_1(t) + f_2(t).$$

例如 $\sin t$ 和 1 分别是微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 3\sin t \quad 和 \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 4$$

的解，所以 $x = 1 + \sin t$ 是下列微分方程的解：

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 4 + 3\sin t.$$

非齐次微分方程广泛出现在物理、力学、电学的有外界作用的一类问题中. 例如收音机的接收回路可简化为电容 C、电感 L 和一个外来电磁场产生的感应电动势 $\varepsilon(t)$串联的回路. 根据§1的例5，其中 $R=0$，所以它的方程是

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{LC} x = \frac{1}{LC} \varepsilon(t). \tag{12}$$

由于感应电动势是来自各个电台发射的无线电波，而各个电

台又是以一定的频率进行发射，因此 $\varepsilon(t)$ 将是各种频率波的迭加，即

$$\varepsilon(t)=\sum_{k=1}^{N}(a_k\cos\omega_k t+b_k\sin\omega_k t),$$

ω_1、ω_2、…、ω_N 是互不相同的，N 是电台个数. 根据定理 3，可以先求解比较简单的方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{LC}x=\frac{a_k}{LC}\cos\omega_k t \quad 或 \quad \frac{b_k}{LC}\sin\omega_k t.$$

关于二阶常系数非齐次线性方程的常数变易公式，我们在 § 2 中讨论过.

关于 n 阶常系数非齐次线性方程，我们先就

$$f(t)\equiv A\sin\omega t$$

的特殊情形，介绍一种称为频率特性法的求解方法. 为此，先讨论微分方程

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx=Ae^{i\omega t} \tag{13}$$

的求解. 用 $x=Fe^{i\omega t}$ 试行代入 (13) 得到

$$\{a_0(i\omega)^n+a_1(i\omega)^{n-1}+\cdots+a_n\}Fe^{i\omega t}\equiv Ae^{i\omega t},$$

因此，如果 $\quad a_0(i\omega)^n+a_1(i\omega)^{n-1}+\cdots+a_0\neq 0,$

那末

$$x=\frac{A}{a_0(i\omega)^n+a_1(i\omega)^{n-1}+\cdots+a_n}e^{i\omega t} \tag{14}$$

是非齐次微分方程(13)的解.

如果把 $Ae^{i\omega t}$ 视为系统的输入，把(13)的频率仍为 ω 的解(14)视为系统的输出，那末输出是输入乘以

$$\frac{1}{a_0(i\omega)^n+a_1(i\omega)^{n-1}+\cdots+a_n}. \tag{15}$$

(15)表征了系统对频率为 ω 的正弦输入的响应特性，称为系统的频率特性. 它的意义可从下面的例题看出.

例如对方程(12)，若记 $\omega_0^2=1/LC$，$\varepsilon(t)=A\sin\omega t$，即方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=\omega_0^2A\sin\omega t. \tag{16}$$

我们在§2的例4中已求过它的解，现用频率特性法求解．为此先讨论方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=\omega_0^2Ae^{i\omega t}.$$

当 $\omega_0\neq\omega$ 时这方程有解

$$x=\frac{\omega_0^2}{(i\omega)^2+\omega_0^2}Ae^{i\omega t}=\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}Ae^{i\omega t},$$

它的虚部
$$x=\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}A\sin\omega t$$

是方程(16)的一个解．

如果 ω 是电台的发射频率，ω_0 是接收回路的固有频率，$\omega_0^2=1/LC$，当 $|\omega_0^2-\omega^2|$ 大时，$\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}$ 就很小；而当 ω_0 与 ω 相差很小时，解 $x(t)$ 的振幅 $\frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2-\omega^2|}A$ 就很大．这样，虽然有各种电台的电磁波在空中传播，但只要调整 ω_0 使它非常接近于所希望收听的电台的 ω，则其它电台的影响就可以略去不计，而收听到所需收听的电台节目．

当 $\omega_0=\omega$ 时，方程(16)没有正弦或余弦形状的解，它的特解是

$$x=-\frac{\omega A}{2}t\cos\omega t,$$

它的振幅将无限增大，这种现象称为*共振*．

从上面的求系统与强迫项频率一致的解的过程来看，频率特性法仅需求导运算，不需要积分运算．下述的例题将进一步说明频率特性法的简便性．

［例4］ 试求方程

$$LC\frac{d^2x}{dt^2}+RC\frac{dx}{dt}+x=E_0\sin\omega t \tag{17}$$

的周期为 $2\pi/\omega$ 的解．

解　我们在§2中用常数变易公式求过它的解．现用频率特

性法求解. 为此,先讨论方程

$$LC\frac{d^2x}{dt^2}+RC\frac{dx}{dt}+x=E_0e^{i\omega t},$$

它有特解
$$x=\frac{E_0}{1-\omega^2LC+i\omega RC}e^{i\omega t},$$

它的虚部是

$$x=\frac{E_0}{(1-\omega^2LC)^2+\omega^2R^2C^2}\{(1-\omega^2LC)\sin\omega t-\omega RC\cos\omega t\}.$$

若记 $\omega_0^2=1/LC$, $2\beta=RC\omega_0$, 上式成为

$$\frac{E_0\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega_0^2\omega^2}\{(\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t-2\beta\omega\omega_0\cos\omega t\}$$

$$=\frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega_0^2\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi),$$

其中 φ 适合关系

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\beta\omega\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}.$$

因此,方程(17)具有周期为 $2\pi/\omega$ 的解

$$x=\frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega_0^2\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi).$$

频率特性法只对 $f(t)=\sin(\omega t+\varphi)$ 的方程(11)有效, 对于一般的方程(11), 我们推广 §2 的常数变易公式,得到

定理 4　设 $k(t)$ 是齐次常系数线性方程

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx=0$$

的解,满足初始条件

$$k(0)=\dot{k}(0)=\cdots=k^{(n-2)}(0)=0,\ k^{(n-1)}(0)=1, \tag{18}$$

那末

$$x=\int_0^t k(t-s)\frac{f(s)}{a_0}ds \tag{19}$$

是非齐次常系数线性方程(11)的解.

证　逐次对(19)求导,并注意条件(18),得到

$$\frac{dx}{dt}\equiv\int_0^t\frac{dk(t-s)}{dt}\cdot\frac{f(s)}{a_0}ds,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\equiv\int_0^t\frac{d^2k(t-s)}{dt^2}\cdot\frac{f(s)}{a_0}ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\equiv\int_0^t\frac{d^{n-1}k(t-s)}{dt^{n-1}}\cdot\frac{f(s)}{a_0}ds,$$

$$\frac{d^nx}{dt^n}\equiv\frac{1}{a_0}\cdot f(t)+\int_0^t\frac{d^nk(t-s)}{dt^n}\cdot\frac{f(s)}{a_0}ds,$$

代入方程(11)，就得

$$L_nx\equiv f(t)+\int_0^t\left\{a_0\frac{d^nk(t-s)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}k(t-s)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nk(t-s)\right\}\frac{f(s)}{a_0}\,ds\equiv f(t).$$

所以(19)是(11)的解.

表达式(19)是从二阶非齐次常系数方程求解公式用类比方法得到的. 我们将在第三章中用常数变易法进行推导.

习　题

1. 求下列微分方程的通解(实形式和复形式):

1) $\frac{d^4x}{dt^4}+4\frac{d^3x}{dt^3}+8\frac{d^2x}{dt^2}+8\frac{dx}{dt}+4x=0$;

2) $\frac{d^4x}{dt^4}+x=0$;

3) $\frac{d^5x}{dt^5}+8\frac{d^3x}{dt^3}+16\frac{dx}{dt}=0$;

4) $\frac{d^4x}{dt^4}-4\frac{d^3x}{dt^3}+6\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+x=0$;

5) $\frac{d^nx}{dt^n}+a^nx=0$;

6) $\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^2x}{dt^2}+x=t$.

2. 求微分方程

$$\frac{d^4x}{dt^4}-x=0$$

满足初值条件

$$x(0)=2,\ \dot{x}(0)=-1,\ \ddot{x}(0)=-2,\ x^{(3)}(0)=1$$

的解.

3．构造常系数齐次线性微分方程，使下列函数是它的解，并且方程的阶数最低：

1) e^{-t}, $\cos t$, $\sin t$;

2) e^{2t}, e^{-2t}, $t\cos t$, $t\sin t$, $e^{-t}\sin t$, $e^{-t}\cos t$;

3) e^{t}, te^{t}, $\cdots$, $t^{n-1}e^{t}$;

4) e^{-t}, te^{-t}, $\cdots$, $t^{k-1}e^{-t}$, e^{t}, te^{t}, $\cdots$, $t^{k-1}e^{t}$.

4．求下列微分方程的全部实值解：

1) $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}+2t\dfrac{dx}{dt}-n(n+1)x=0$;

2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{1}{1+t}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{1}{(1+t)^2}x=0$;

3) $\dfrac{d^3x}{dt^3}-\dfrac{1}{t}\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{2}{t^2}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{2}{t^3}x=0$;

4) $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=-1$.

5．给出 n 阶常系数齐次线性微分方程的解具有下述性质之一的充要条件：

1) 它的每一解当 $t\to+\infty$ 时趋向于零；

2) 它的每一解在 $0\leqslant t<\infty$ 上是有界的；

3) 存在在 $0\leqslant t<+\infty$ 上无界的解.

*6．讨论 n 阶欧拉方程

$$a_0t^n\frac{d^nx}{dt^n}+a_1t^{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx=0$$

的求解方法，这里 a_0、a_1、$\cdots$、a_n 是常数，$a_0\neq0$（提示：考察形状为 t^λ 的解，其中 λ 是待定常数）.

*7．试求欧拉方程

$$2t^3\frac{d^3x}{dt^3}+9t^2\frac{d^2x}{dt^2}+7t\frac{dx}{dt}-2x=0$$

的全部解($t>0$).

8．求微分方程

$$\frac{d^4x}{dt^4}-4\frac{d^3x}{dt^3}+6\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+x=(t+1)e^t$$

的全部解.

9．设 $x=\varphi_j(t)\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 是微分方程

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx=f_j(t)$$

的解，试证 $x=\sum_{j=1}^{k} c_j\varphi_j(t)$ 是微分方程

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n x=\sum_{j=1}^{k} c_j f_j(t)$$

的解。

10．求微分方程

$$\frac{d^4x}{dt^4}+x=2e^t$$

满足初值条件

$$x(0)=\dot{x}(0)=\ddot{x}(0)=\dddot{x}(0)=1$$

的解。

*§4 运算子法

前面我们已经讨论了常系数齐次线性微分方程的求解方法，欧拉的指数函数法是它的基础．对于非齐次方程，主要是常数变易公式和频率特性法．现在给出另一种求非齐次方程特解的方法——运算子法．

设记号 D 表示求导运算，即定义

$$Dx=\frac{dx}{dt},$$

其中 $x=x(t)$ 是一个可微函数，今后称 D 为运算子．我们可以逐次定义

$$D^2x=D(Dx)=\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$D^3x=D(D^2x)=\frac{d^3x}{dt^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^nx=D(D^{n-1}x)=\frac{d^nx}{dt^n}.$$

一般地，如果 $P(\lambda)\equiv\sum_{j=0}^{n} a_j\lambda^j$ 是 λ 的 n 次多项式，我们定义

$$P(D)x\equiv\sum_{j=0}^{n} a_jD^jx\equiv\sum_{j=0}^{n} a_j\frac{d^jx}{dt^j},$$

其中 $x(t)$ 具有 n 阶导数，而形式地记

$$P(D)=\sum_{j=0}^{n} a_jD^j.$$

若 $P(D)$ 和 $Q(D)$ 是 n 阶和 m 阶多项式运算子，定义

$$\{P(D)+Q(D)\}x \equiv P(D)x+Q(D)x;$$

$$\{P(D)Q(D)\}x \equiv P(D)\{Q(D)x\}.$$

性质 1 若 $P(\lambda)$、$Q(\lambda)$ 和 $R(\lambda)$ 是次数不大于 n 的多项式，并且 $P(\lambda)+Q(\lambda)\equiv R(\lambda)$，那末对于具有 n 阶导数的函数 $x(t)$，成立着

$$P(D)x+Q(D)x \equiv R(D)x.$$

它的证明是显然的．但必须注意上述等式的适用范围是 n 阶可微函数．例如 $(1+\lambda^2)+(-\lambda^2+\lambda)\equiv\lambda+1$，所以

$$(D^2+1)x+(-D^2+D)x \equiv Dx+x$$

仅对具有二阶导数的函数成立．

性质 2 若 $P(\lambda)$ 和 $Q(\lambda)$ 的次数分别为 n 和 m，那末对于具有 nm 阶连续导数的函数 $x(t)$，成立着

$$\{P(D)Q(D)\}x \equiv \{Q(D)P(D)\}x.$$

证 记 $P(D)\equiv\sum_{j=0}^{n}a_jD^j$，$Q(D)\equiv\sum_{k=0}^{m}b_kD^k$，那末

$$\{P(D)Q(D)\}x \equiv P(D)\{Q(D)x\} \equiv P(D)\left\{\sum_{k=0}^{m}b_kD^kx\right\}$$

$$\equiv P(D)\left\{\sum_{k=0}^{m}b_k\frac{d^kx}{dt^k}\right\},$$

上式右端等于 $\sum_{j=0}^{n}a_jD^j\left\{\sum_{k=0}^{m}b_k\frac{d^kx}{dt^k}\right\}$，即等于

$$\sum_{j=0}^{n}a_j\sum_{k=0}^{m}b_k\frac{d^{k+j}x}{dt^{k+j}} \equiv \sum_{k=0}^{m}b_k\sum_{j=0}^{n}a_j\frac{d^{k+j}x}{dt^{k+j}},$$

而它的右端就是 $\{Q(D)P(D)\}x$，即性质 2 得证．

性质 3 若 $P(\lambda)$ 是 n 次多项式，$x(t)$ 具有 n 阶导数，那末

1° $P(D)e^{at}\equiv P(a)e^{at}$;

2° $P(D)[e^{at}x(t)]\equiv e^{at}P(D+a)x(t)$;

3° $P(D^2)\sin\omega t\equiv P(-\omega^2)\sin\omega t$,

$P(D^2)\cos\omega t\equiv P(-\omega^2)\cos\omega t$.

证 1°、3° 的证明留给读者．仅证 2°．因为

$$D(e^{at}x(t)) \equiv \frac{d}{dt}(e^{at}x(t)),$$

而
$$\frac{d}{dt}(e^{at}x(t)) \equiv ae^{at}x(t) + e^{at}\frac{dx}{dt},$$

所以
$$D(e^{at}x(t)) \equiv e^{at}(D+a)x.$$

运用数学归纳法可证：对于任何自然数 j 成立

$$D^j(e^{at}x(t)) \equiv e^{at}(D+a)^j x,$$

因此，若 $P(D)=\sum\limits_{j=0}^{n} a_j D^j$，那末

$$P(D)(e^{at}x(t)) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j D^j(e^{at}x(t)) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j e^{at}(D+a)^j x,$$

它就是 $e^{at}P(D+a)x$。证毕.

在上述三个性质的基础上，我们可以用运算子来求解非齐次常系数线性微分方程.

我们用记号 $\frac{1}{P(D)}f(t)$ 表示非齐次方程

$$P(D)x=f(t)$$

的一个特解.

[例 1]　设 $P(a)\neq 0$，则微分方程

$$P(D)x=e^{at}$$

具有特解
$$x=\frac{1}{P(a)}e^{at}.$$

证　将 $x=\frac{1}{P(a)}e^{at}$ 代入原方程得

$$P(D)x \equiv P(D)\left\{\frac{1}{P(a)}e^{at}\right\} \equiv \frac{1}{P(a)}\{P(D)e^{at}\} \equiv e^{at}.$$

[例 2]　设 $P(-\omega^2)\neq 0$，则微分方程

$$P(D^2)x=\sin\omega t$$

有特解
$$x=\frac{1}{P(-\omega^2)}\sin\omega t.$$

读者参照例 1 自行证明.

[例 3]　将 $P(D)$ 表示如下：$P(D)=P_1(D^2)+DP_2(D^2)$，求微分方程

$$P(D)x=\sin\omega t$$

的特解.

解 若 x 是它的特解，则

$$\{P_1(D^2)+DP_2(D^2)\}x=\sin\omega t,$$

用 $P_1(D^2)-DP_2(D^2)$ 乘上式两端得到

$$\{P_1^2(D^2)-D^2P_2^2(D^2)\}x=\{P_1(D^2)-DP_2(D^2)\}\sin\omega t,$$

上式右端等于

$$P_1(-\omega^2)\sin\omega t-DP_2(-\omega^2)\sin\omega t$$
$$=P_1(-\omega^2)\sin\omega t-\omega P_2(-\omega^2)\cos\omega t.$$

所以

$$\{P_1^2(D^2)-D^2P_2^2(D^2)\}x=P_1(-\omega^2)\sin\omega t-\omega P_2(-\omega^2)\cos\omega t.$$

再根据例 2, 当 $P_1^2(-\omega^2)+\omega^2P_2^2(-\omega^2)\neq0$ 时，它有特解

$$x=\frac{P_1(-\omega^2)\sin\omega t-\omega P_2(-\omega^2)\cos\omega t}{P_1^2(-\omega^2)+\omega^2P_2^2(-\omega^2)}.$$

[例 4] 设 $Q(t)$ 是 k 次多项式，试求

$$P(D)x=Q(t)$$

的特解.

解 设 $P(\lambda)\equiv\lambda^l g(\lambda)$, $g(0)\neq0$, $g(\lambda)$ 是多项式, l 是自然数或零. 在 $\lambda=0$ 附近把 $\frac{1}{g(\lambda)}$ 按泰勒公式展开至 λ^k 项，即设

$$\frac{1}{g(\lambda)}\equiv c_0+c_1\lambda+\cdots+c_k\lambda^k+\frac{\psi(\lambda)}{g(\lambda)}\lambda^{k+1},$$

其中 $\psi(\lambda)$ 是多项式，这时有

$$1\equiv g(\lambda)(c_0+c_1\lambda+\cdots+c_k\lambda^k)+\psi(\lambda)\lambda^{k+1}.$$

根据性质 1, 有下述恒等式

$$g(D)(c_0+c_1D+\cdots+c_kD^k)Q(t)+\psi(D)D^{k+1}Q(t)\equiv Q(t),$$

但 $Q(t)$ 是 k 次多项式，所以 $D^{k+1}Q(t)\equiv0$. 由此得到

$$g(D)\{c_0Q(t)+c_1\dot{Q}(t)+\cdots+c_kQ^{(k)}(t)\}\equiv Q(t).$$

如果 $l=0$, 即 $P(\lambda)\equiv g(\lambda)$, $P(0)\neq0$, 那末

$$x=c_0Q(t)+c_1\dot{Q}(t)+\cdots+c_kQ^{(k)}(t)$$

是它的一个特解.

如果 $l \geq 1$，置 $y = D^l x$，原方程成为

$$g(D)y = Q(t),$$

而
$$y = c_0 Q(t) + c_1 \dot{Q}(t) + \cdots + c_k Q^{(k)}(t)$$

是它的特解，即得

$$D^l x = \frac{d^l x}{dt^l} = c_0 Q(t) + c_1 \dot{Q}(t) + \cdots + c_k Q^{(k)}(t),$$

这时易知

$$x = \underbrace{\int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t_1}}_{l} \{c_0 Q(t_1) + c_1 \dot{Q}(t_1) + \cdots + c_k Q^{(k)}(t_1)\} dt_1 \cdots dt_l$$

是原方程的一个特解。

上述结论可以形式运算如下：

$$P(D)x = Q(t),$$

所以

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{P(D)} Q(t) = \frac{1}{D^l} \frac{1}{g(D)} Q(t) \\ &= \frac{1}{D^l} \left\{ c_0 + c_1 D + \cdots + c_k D^k + \frac{\psi(D)}{g(D)} D^{k+1} \right\} Q(t) \\ &= \frac{1}{D^l} \{ c_0 Q(t) + c_1 \dot{Q}(t) + \cdots + c_k Q^{(k)}(t) \}, \end{aligned}$$

从而得到解的表达式。

［例 5］　微分方程

$$P(D)x = e^{at} g(t)$$

的特解是　$x = \dfrac{1}{P(D)} e^{at} g(t) = e^{at} \dfrac{1}{P(D+a)} g(t).$

它的证明留给读者。

下面再来看些具体例子。

［例 6］　$\dfrac{d^5 x}{dt^5} + x = e^t$，写成算子形式

$$(D^5 + 1)x = e^t.$$

所以
$$x = \frac{1}{D^5 + 1} e^t = \frac{1}{2} e^t$$

是特解。

[例 7]　$(D^2+1)x=\sin 2t$.

解　$x=\dfrac{1}{1+D^2}\sin 2t=\dfrac{1}{1-2^2}\sin 2t=-\dfrac{1}{3}\sin 2t$

是特解.

[例 8]　$(D^2+D)x=\sin t$.

解　$x=\dfrac{1}{D^2+D}\sin t=\dfrac{D^2-D}{D^4-D^2}\sin t$

$$=\frac{1}{D^4-D^2}\{-\sin t-\cos t\}=\frac{1}{(-1)^2+1}(-\sin t-\cos t)$$

$$=-\frac{1}{2}(\sin t+\cos t).$$

[例 9]　$(D^3-D)x=t$.

解　$x=\dfrac{-1}{D(1-D^2)}t=\dfrac{-1}{D}(1+D^2+\cdots)t=\dfrac{-1}{D}t=-\dfrac{t^2}{2}$.

[例 10]　$(D^3+1)x=\sin t$.

解　若按例 2 方法, 则因为 $P(-1^2)=1-1=0$, 不能使用. 为此讨论微分方程

$$(D^2+1)x=e^{it},$$

对它也不能用例 1 的方法, 现根据例 5 的方法进行

$$x=\frac{1}{D^2+1}e^{it}=e^{it}\frac{1}{(D+i)^2+1}\cdot 1=e^{it}\frac{1}{D^2+2iD}\cdot 1$$

$$=e^{it}\frac{1}{D}\left[\frac{1}{2i}-\frac{1}{(2i)^2}D+\cdots\right]\cdot 1=e^{it}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{2i}\right)=\frac{t}{2i}e^{it}.$$

它的虚部　　$x=-\dfrac{t}{2}\cos t$

是 $\ddot{x}+x=\sin t$ 的特解.

[例 11]　求 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=te^t\sin t$ 的特解.

解　先讨论

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=te^t\cdot e^{it}=te^{(1+i)t}$$

的特解.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{1+D^2}\, t e^{(1+i)t} = e^{(1+i)t} \frac{1}{1+(D+1+i)^2}\, t \\
&= e^{(1+i)t} \frac{1}{1+2i+2(1+i)D+D^2}\, t \\
&= e^{(1+i)t} \left\{ \frac{1}{1-2i} - \frac{2(1+i)}{(1+2i)^2} D + \cdots \right\} t \\
&= e^{(1+i)t} \left\{ \frac{t}{1+2i} - \frac{2(1+i)}{(1+2i)^2} \right\} \\
&= e^{(1+i)t} \left(\frac{1-2i}{5} t + \frac{-2+14i}{25} \right).
\end{aligned}
$$

它的虚部

$$
x = e^t[(14-10t)\cos t + (-2+5t)\sin t]/25
$$

是原方程的特解.

习　　题

试用运算子方法求解下列方程:

1. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 4x = t^2$.

2. $3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 12x = 2\sin^2 t$.

3. $5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 5x = \sin t - \cos 2t$.

4. $\dfrac{d^4x}{dt^4} - 4\dfrac{d^3x}{dt^3} + 6\dfrac{d^2x}{dt^2} \quad 4\dfrac{dx}{dt} + x = (t+1)e^t$.

5. $\dfrac{d^4x}{dt^4} + 2\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = t$.

第三章

线性常微分方程组

§1 向量值和矩阵值函数

如果在一组常微分方程中未知函数和它们的导数都是一次地出现，就称该方程组为线性常微分方程组，或简称为线性方程组。这是一类理论较完整而且应用广泛的常微分方程组，并且它也是讨论非线性方程的必要基础。和线性代数一样，在线性常微分方程组的讨论中，向量、矩阵及其运算是非常有用的。本节先介绍有关向量值函数和矩阵值函数的一些基本性质。

一、矩阵值函数

如果对于区间 $\alpha<t<\beta$ 内的每一 t，有 $n\times m$ 阶矩阵 $A(t)$ 与之对应，就称 $A(t)$ 是区间 $\alpha<t<\beta$ 内的矩阵值函数，当 $m=1$ 或 $n=1$ 时，我们称矩阵值函数为向量值函数。设

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2m}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nm}(t) \end{pmatrix}$$

在 $\alpha<t<\beta$ 内有定义，即它的每一元素 $a_{jk}(t)$ $(j=1, 2, \cdots, n; k=1, 2, \cdots, m)$ 是在 $\alpha<t<\beta$ 内有定义的函数。

如果 $a_{jk}(t)$ $(j=1, 2, \cdots, n; k=1, 2, \cdots, m)$ 都是 $\alpha<t<\beta$ 内的连续函数，就称 $A(t)$ 在 $\alpha<t<\beta$ 内是连续的；如果 $a_{jk}(t)$ $(j=1, 2, \cdots, n; k=1, 2, \cdots, m)$ 都是区间 $\alpha<t<\beta$ 内的可微函数，就称 $A(t)$ 在 $\alpha<t<\beta$ 内是可微的，并且定义

$$\frac{dA(t)}{dt}=\left(\frac{da_{jk}(t)}{dt}\right)_{j=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,m.}$$

又如果 t_0 和 t 在区间 (α, β) 内，我们定义

$$\int_{t_0}^{t} A(s)ds = \left(\int_{t_0}^{t} a_{jk}(s)ds \right)_{j=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,m.}$$

例如 $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{d}{dt}\cos\omega t\\ \frac{d}{dt}\sin\omega t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\omega\sin\omega t\\ \omega\cos\omega t\end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t\\ -\omega\cos\omega t & -\omega\sin\omega t\end{pmatrix},$$

$$\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}\cos\omega s\\ \sin\omega s\end{pmatrix}ds = \begin{pmatrix}\frac{1}{\omega}(\sin\omega t - \sin\omega t_0)\\ -\frac{1}{\omega}(\cos\omega t - \cos\omega t_0)\end{pmatrix}.$$

关于矩阵值函数的微分、积分运算法则和普通数值函数类似，现列举如下．今后记元素全为零的矩阵为 $\mathbf{0}$．并且假定所遇到的矩阵值函数是可微的或可积的．

1° $\frac{dA}{dt} \equiv 0$ 的充要条件是 $A(t) \equiv A$ 为常值矩阵；

2° 如果 $A(t)$ 和 $B(t)$ 都是 $n\times m$ 阶的，则

$$\frac{d}{dt}[A(t) \pm B(t)] \equiv \frac{dA(t)}{dt} \pm \frac{dB(t)}{dt};$$

3° 如果 $A(t)$ 是 $n\times m$ 阶的，$B(t)$ 是 $m\times l$ 阶的，则

$$\frac{d}{dt}[A(t)B(t)] \equiv \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt};$$

4° 如果 $A(t)$ 是 $n\times m$ 阶的，$\boldsymbol{x}(t)$ 是 m 维向量值函数，则

$$\frac{d}{dt}[A(t)\boldsymbol{x}(t)] = \frac{dA(t)}{dt}\boldsymbol{x}(t) + A(t)\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt};$$

5° 如果 $A^T(t)$ 和 $A^*(t)$ 分别表示 $A(t)$ 的转置矩阵和共轭转置矩阵 $A^*(t) = \overline{(A^T(t))}$，则

$$\frac{dA^T(t)}{dt} \equiv \left[\frac{dA(t)}{dt}\right]^T;$$

$$\frac{dA^*(t)}{dt}=\left[\frac{dA(t)}{dt}\right]^*;$$

6° 如果在$(\alpha,\ \beta)$内n阶方阵$A(t)$有逆矩阵$A^{-1}(t)$，则

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t)=-A^{-1}(t)\frac{dA(t)}{dt}A^{-1}(t);$$

7° $\int_{t_0}^{t}(aA(s)+bB(s))ds=a\int_{t_0}^{t}A(s)ds+b\int_{t_0}^{t}B(s)ds$，这里$a$、$b$是常数；

8° 如果A是$n\times m$阶常值矩阵，$B(t)$是$m\times l$阶矩阵值函数，则

$$\int_{t_0}^{t}AB(s)ds=A\int_{t_0}^{t}B(s)ds;$$

如果$A(t)$是$n\times m$阶矩阵值函数，B是$m\times l$阶常值矩阵，则

$$\int_{t_0}^{t}A(s)Bds=\int_{t_0}^{t}A(s)ds\,B;$$

9°
$$\int_{t_0}^{t}A^T(s)ds=\left(\int_{t_0}^{t}A(s)ds\right)^T;$$

$$\int_{t_0}^{t}A^*(s)ds=\left(\int_{t_0}^{t}A(s)ds\right)^*;$$

10° 如果$A(t)$在$(\alpha,\ \beta)$内是连续的，则

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}A(s)ds=A(t);$$

11° 如果$A(t)$在$(\alpha,\ \beta)$内是可微的，且$\frac{dA(t)}{dt}$连续，则

$$\int_{t_0}^{t}\left(\frac{d}{ds}A(s)\right)ds=A(t)-A(t_0).$$

上述运算法则是不难证明的，我们仅证明6°．由于$A(t)$的元素$a_{jk}(t)$是可微的，因此$A(t)$的行列式$\det A(t)$是可微的，$A(t)$的元素$a_{jk}(t)$的代数余子式$A_{jk}(t)$也是可微的，从而$A^{-1}(t)$是可微的．又因为

$$A^{-1}(t)A(t)=I,$$

这里I是单位阵，根据1°得到

$$\frac{d}{dt}[A^{-1}(t)A(t)]=0.$$

对上式左端运用3°得到

$$\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)+A^{-1}(t)\frac{dA(t)}{dt}=0,$$

从而得证 $$\frac{dA^{-1}(t)}{dt}=-A^{-1}(t)\frac{dA(t)}{dt}A^{-1}(t).$$

二、矩阵和向量的范数

假设 $A=(a_{jk})$ 和 $B=(b_{jk})$ 是两个 $n\times m$ 阶矩阵，我们定义 A 和 B 的内积 $\langle A, B\rangle$ 为

$$\langle A, B\rangle=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{jk}\bar{b}_{jk};$$

而矩阵 A 的范数 $\|A\|$ 为

$$\|A\|=\sqrt{\langle A, A\rangle}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|a_{jk}|^2}.$$

特别，当 $m=1$ 时，若 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$，那末

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle=\sum_{j=1}^{n}x_j\bar{y}_j,$$

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2}.$$

关于范数和内积有以下性质：

1° $\|A\|\geqslant 0$，且 $\|A\|=0$ 等价于 $A=0$；

2° 如果 α 是一个数，那末 $\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$；

3° $|\langle A, B\rangle|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$；

4° $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$；

5° $\|A^T\|=\|A^*\|=\|A\|$；

6° 如果 A 是 $n\times m$ 阶矩阵，B 是 $m\times l$ 阶矩阵，那末

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|;$$

7° 如果 $A(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，那末

$$\left\|\int_\alpha^\beta A(t)dt\right\| \leqslant \int_\alpha^\beta \|A(t)\|dt.$$

性质 3° 称为柯西(Cauchy)–许瓦兹(Schwarz)不等式；性质 4° 称为三角不等式.

性质 3° 的证明. 如果 $A=0$ 或 $B=0$, 它显然成立; 如果 $A\neq 0$, $B\neq 0$, 那末 $\|A\|>0$, $\|B\|>0$, 记 $\lambda=\sqrt{\|B\|/\|A\|}$, 那末

$$|\langle A, B\rangle| = \left|\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_{jk}\bar{b}_{jk}\right| \leqslant \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |a_{jk}\bar{b}_{jk}|,$$

但 $$|a_{jk}\bar{b}_{jk}| = \left|\lambda\, a_{jk}\cdot \frac{1}{\lambda}\bar{b}_{jk}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left\{|\lambda\, a_{jk}|^2 + \left|\frac{1}{\lambda} b_{jk}\right|^2\right\},$$

所以

$$|\langle A, B\rangle| \leqslant \frac{1}{2}\left\{|\lambda|^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |a_{jk}|^2 + \frac{1}{|\lambda|^2}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |b_{jk}|^2\right\}$$
$$= \|A\|\cdot\|B\|.$$

性质 4° 的证明, 因为

$$\|A+B\|^2 = \langle A+B, A+B\rangle,$$

而容易证明

$$\langle A+B, A+B\rangle = \langle A, A\rangle + \langle A, B\rangle + \langle B, A\rangle + \langle B, B\rangle,$$

所以 $$\|A+B\|^2 \leqslant \|A\|^2 + 2|\langle A, B\rangle| + \|B\|^2.$$

根据性质 3° 得到

$$\|A+B\|^2 \leqslant \|A\|^2 + 2\|A\|\cdot\|B\| + \|B\|^2.$$

所以 $$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

性质 1°, 2°, 5° 容易证明, 留给读者.

性质 6° 的证明. 因为 $AB=\left(\sum_{s=1}^m a_{js}b_{sk}\right)$, 所以

$$\|AB\|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l \left|\sum_{s=1}^m a_{js}b_{sk}\right|^2,$$

但根据性质 3° 有

$$\left|\sum_{s=1}^m a_{js}b_{sk}\right|^2 \leqslant \sum_{s=1}^m |a_{js}|^2\cdot \sum_{s=1}^m |b_{sk}|^2,$$

所以

$$\|AB\|^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{s=1}^{m}|a_{js}|^2\cdot\sum_{s=1}^{m}|b_{sk}|^2\right)$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}|a_{js}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}|b_{sk}|^2\right)$$

$$=\|A\|^2\cdot\|B\|^2.$$

因此
$$\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|.$$

为证明性质7°，需要矩阵序列的极限概念．设 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 是一列 $n\times m$ 阶矩阵，如果存在 A 使得当 $k\to+\infty$ 时

$$\|A_k-A\|\to 0,$$

就称 A 是 $\{A_k\}$ 的极限，记为

$$\lim_{k\to\infty}A_k=A.$$

显然 $A_k\to A$ 的充要条件是 A_k 的元素当 $k\to\infty$ 时趋于 A 的相应元素，且 $\|A\|=\lim\limits_{k}\|A_k\|$.

性质7°的证明．将 $[\alpha,\beta]$ 分为 k 等分，就有

$$\int_\alpha^\beta A(t)dt=\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=0}^{k-1}A\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{k}\nu\right)\frac{\beta-\alpha}{k},$$

但

$$\left\|\sum_{\nu=0}^{k-1}A\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{k}\nu\right)\frac{\beta-\alpha}{k}\right\|\leqslant\sum_{\nu=0}^{k-1}\left\|A\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{k}\nu\right)\right\|\frac{\beta-\alpha}{k},$$

令 $k\to\infty$ 得到

$$\left\|\int_\alpha^\beta A(t)dt\right\|\leqslant\int_\alpha^\beta\|A(t)\|dt.$$

三、线性常微分方程组的矩阵表示

设线性常微分方程组是

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t),\\
\frac{dx_2}{dt}&=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\cdots+a_{2n}(t)x_n+f_2(t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n+f_n(t),
\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $a_{jk}(t)$ $(j, k=1, 2, \cdots, n)$ 和 $f_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 是自变量 t 的已知函数，它们在区间 (α, β) 内是连续的。

若记 $A(t)=(a_{jk}(t))$,

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T,$$

$$\boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}=(f_1(t), \cdots, f_n(t))^T,$$

那末方程组(1)可写成矩阵形式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t). \tag{2}$$

方程组(1)是具有 n 个未知函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 的一阶微分方程组，并且导数已经解出了，称为标准的线性常微分方程组. 它的初值问题是：设给定了 $t_0\in(\alpha, \beta)$ 和 n 个数 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$, 寻求方程组(1)的解 $x_1=x_1(t), x_2=x_2(t), \cdots, x_n=x_n(t)$, 且满足初值条件

$$x_1(t_0)=x_1^0, \quad x_2(t_0)=x_2^0, \quad \cdots, \quad x_n(t_0)=x_n^0. \tag{3}$$

若记 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)^T$, 那末初值问题可表述为：给定了 $t_0\in(\alpha, \beta)$ 和 $\boldsymbol{x}_0$, 寻求方程组(2)的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$, 且满足初值条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0. \tag{4}$$

对于二阶线性常微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=f(t), \tag{5}$$

其中 $p(t)$、$q(t)$ 和 $f(t)$ 是区间 (α, β) 内的已知连续函数. 若置

$$x_1=x, \quad x_2=\frac{dx}{dt},$$

那末

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt}=-q(t)x_1-p(t)x_2+f(t). \tag{6}$$

若记

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},\quad A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix},$$

那末(6)可写为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t).$$

四、e^{At}

设 A 是 n 阶方阵，我们定义 e^{At} 是

$$e^{At}\equiv I+At+\frac{1}{2}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots. \tag{7}$$

为使 e^{At} 有定义，必须证明(7)的右端是收敛的，由于

$$\left\|\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}A^kt^k\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{1}{k!}A^kt^k\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}(\|A\|\,|t|)^k\leqslant e^{\|A\|},$$

所以 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\|A^kt^k\|$ 是收敛的，从而(7)的右端是收敛的。

我们称 e^{At} 为矩阵指数函数。

当 $n=1$, $A=a$ 时，它成为指数函数 e^{at}. 我们知道 $e^{a\cdot 0}=1$; $\frac{d}{dt}e^{at}=ae^{at}$; $(e^{at})^{-1}=e^{-at}$. 关于 e^{At}，我们可以证明：

1° $e^{A\cdot 0}=I$;

2° $\frac{d}{dt}e^{At}\equiv Ae^{At}\equiv e^{At}\cdot A$;

3° e^{At} 的逆 $(e^{At})^{-1}$ 存在，并且 $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$.

关于性质1°，由表达式(7)立即得到。

关于性质2°，显然，级数(7)在任何有界区间上是一致收敛的，从而可以逐项积分，即

$$\int_0^t e^{As}ds=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t\frac{A^ks^k}{k!}ds=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^{k+1}}{(k+1)!}.$$

于是
$$\int_0^t Ae^{As}ds=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!}=e^{At}-I.$$
两边对 t 求导得
$$Ae^{At}=\frac{d}{dt}e^{At}.$$
同样可证
$$\frac{d}{dt}e^{At}=e^{At}\cdot A.$$

关于性质 3°，因为
$$\frac{d}{dt}(e^{At}e^{-At})=\frac{de^{At}}{dt}e^{-At}+e^{At}\frac{d}{dt}(e^{-At})$$
$$=Ae^{At}e^{-At}-e^{At}Ae^{-At}=0,$$
所以
$$e^{At}\cdot e^{-At}=e^{A\cdot 0}\cdot e^{-A\cdot 0}=I,$$
即 e^{At} 的逆存在且等于 e^{-At}.

定理 1　齐次常系数线性微分方程组
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}\tag{8}$$
满足初值条件
$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\tag{9}$$
的解在 $-\infty<t<+\infty$ 内存在且唯一，这里 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 是给定的.

证　由于 e^{At} 的逆存在，所以
$$e^{-At}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}-A\boldsymbol{x}\right)=0,$$
即
$$\frac{d}{dt}(e^{-At}\boldsymbol{x})=0,$$
两边从 t_0 到 t 积分得
$$e^{-At}\boldsymbol{x}(t)=e^{-At_0}\boldsymbol{x}_0,$$
所以
$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\cdot e^{-At_0}\boldsymbol{x}_0.$$
这就是说，方程组(8)满足条件(9)的解必具有上述形状. 另一方面容易证明，$e^{At}e^{-At_0}\boldsymbol{x}_0$ 是方程组(8)的解且满足条件(9). 这就证明了定理.

同样可证 $\boldsymbol{x}=e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0$ 是方程组(8)的解，满足条件(9). 因此，由定理 1 得到

$$e^{At}\cdot e^{-At_0}\boldsymbol{x}_0\equiv e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0.$$

由于 $\boldsymbol{x}_0$ 可以是任意向量，所以由上式推出

$$e^{At}e^{-At_0}\equiv e^{A(t-t_0)}.$$

从而得到下述性质

4° $$e^{A(t+s)}\equiv e^{At}e^{As}.$$

事实上，若取 $t_0=-s$，就得上式. 性质 4° 称为矩阵指数函数的加法定理.

定理 2 设 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 $(\alpha,\ \beta)$ 内连续，那末非齐次常系数线性微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{10}$$

满足初值条件(9)的解在 $(\alpha,\ \beta)$ 内存在且唯一，并且当 $t\in(\alpha,\ \beta)$ 时

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}\boldsymbol{f}(s)ds. \tag{11}$$

证 由于

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}\boldsymbol{x})\equiv e^{-At}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}-A\boldsymbol{x}\right)\equiv e^{-At}\boldsymbol{f}(t),$$

所以 $$e^{-At}\boldsymbol{x}(t)-e^{-At_0}\boldsymbol{x}_0\equiv\int_{t_0}^{t}e^{-As}\boldsymbol{f}(s)ds,$$

从而 $$\boldsymbol{x}(t)\equiv e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}\boldsymbol{f}(s)ds,$$

即(10)满足条件(9)的解可表成形状(11). 反之，可证(11)是(10)的解，且满足条件(9).

因此，定理 2 原则上给出了常系数线性微分方程组的求解方法，我们称(11)为常数变易公式. 但是，由于 e^{At} 的计算是复杂的，我们今后还需讨论常系数方程组的具体求解方法. 现就最简单的情形讨论 e^{At} 的计算.

[例 1] 设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

试求 e^{At}.

解　由于

$$A^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & 0\\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k\end{pmatrix},$$

所以　$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & 0\\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k\end{pmatrix}t^k=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & 0\\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}.$$

根据定理1知

$$\boldsymbol{x}=e^{At}\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & 0\\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1e^{\lambda_1 t}\\ c_2e^{\lambda_2 t}\\ \vdots\\ c_ne^{\lambda_n t}\end{pmatrix}$$

是常微分方程组

$$\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dt}=\lambda_1x_1,\\ &\frac{dx_2}{dt}=\lambda_2x_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{dx_n}{dt}=\lambda_nx_n\end{aligned}\tag{12}$$

的解.

[例2]　设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},$$

试求 e^{At}.

解 因为

$$A=\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

所以
$$A^2=\lambda^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+2\lambda\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda\\0&\lambda^2\end{pmatrix},$$

$$A^3=\lambda^3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+3\lambda^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^3&3\lambda^2\\0&\lambda^3\end{pmatrix},$$

$$\cdots\cdots$$

$$A^k=\lambda^k\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+k\lambda^{k-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&\lambda^k\end{pmatrix},$$

$$\cdots\cdots$$

因此
$$e^{At}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&te^{\lambda t}\\0&e^{\lambda t}\end{pmatrix}.$$

根据定理1知

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&te^{\lambda t}\\0&e^{\lambda t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

是微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=\lambda x_1+x_2\\ \frac{dx_2}{dt}&=\lambda x_2\end{aligned}\tag{13}$$

的解.

微分方程组(12)和(13)是可以直接求解的. 例如从(13)的第二式得到

$$x_2=c_2e^{\lambda t},$$

代入第一式得到

$$\frac{dx_1}{dt}=\lambda x_1+c_2e^{\lambda t},$$

从而
$$x_1=c_1e^{\lambda t}+c_2te^{\lambda t},$$

即得
$$x=\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

这就是说，直接求解常系数线性微分方程组比通过 e^{At} 的计算来求解方便．这里的表达式(11)是一个理论的公式，在线性系统理论、控制理论、稳定性理论研究中是十分重要的．

习　题

1．设 A 和 B 是两个可互相交换的 n 阶方阵，即
$$AB=BA,$$
求证
$$e^{A+B}=e^A\cdot e^B=e^B\cdot e^A.$$

2．设 $A=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$，
计算 e^{At}．

3．设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$，
且 A_1、A_2 是方阵，试证
$$e^{At}=\begin{pmatrix} e^{A_1t} & 0 \\ 0 & e^{A_2t} \end{pmatrix}.$$

4．利用 e^{At} 求解下列常微分方程组：

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+4y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-2y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x+y+1, \\ \dfrac{dy}{dt}=-y+e^t. \end{cases}$ $x(0)=x_0,\ y(0)=y_0.$

5．设 n 阶方阵 A 的特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，试证 e^{At} 的特征根为 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$．

6．证明常系数线性微分方程组
$$\frac{dx}{dt}=Ax$$
具有周期为 $\omega(\omega\neq 0)$ 的非零周期解的充要条件是 A 具有形状如 $\dfrac{2k\pi}{\omega}i$ 的特征根，其中 k 是整数，$k\neq 0$．

7．若记 $e^{At}=(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t))$，

试证 $\varphi_j(t)$ 是常微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=Ax$$

的解.

§2 常系数线性微分方程组的求解

我们在讨论 e^{At} 时已给出一阶常系数线性微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x} \tag{1}$$

的求解公式，其中 A 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维向量. 本节给出它的一种具体求解方法，即待定向量法，并利用解的表达式讨论方程组(1)的解在 $t\to+\infty$ 时的性状.

很明显，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是方程组(1)的解，称之为平凡解. 我们要给出方程组(1)的非平凡解的求解方法.

首先，可用欧拉指数函数法的思想尝试求方程组(1)的形状如 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}e^{\lambda t}$ 的解，其中数 λ 和向量 $\boldsymbol{h}$ 都是待定的. 将它代入方程组(1)，并消去因子 $e^{\lambda t}$，就得到

$$\lambda\boldsymbol{h}=A\boldsymbol{h},$$

因此，我们证得

定理 1 当且仅当 λ 是 A 的特征值，$\boldsymbol{h}$ 是方阵 A 相应于 λ 的特征向量时，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}e^{\lambda t}(\boldsymbol{h}\neq\boldsymbol{0})$ 是方程组(1)的解.

[例 1] 试求解方程组

$$\frac{dx}{dt}=2x+y,$$

$$\frac{dy}{dt}=y.$$

解 这时

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

它的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2.$

矩阵 A 相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$适合

$$(A-\lambda_1 I)\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

所以 $h_1+h_2=0$，若 $h_2=1$，$h_1=-1$，即 $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$是特征向量，所以

$$x=-c_1e^t,\ y=c_1e^t$$

是方程组的解.

又矩阵 A 相应于 $\lambda_2=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix}$适合

$$(A-\lambda_2 I)\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

所以 $g_2=0$. 因此 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$是相应于特征值 2 的特征向量，而

$$x=c_2e^{2t},\ y=0$$

也是方程组的解. 所以

$$x=c_2e^{2t}-c_1e^t,$$
$$y=c_1e^t$$

是方程组的解，含有两个任意常数 c_1 和 c_2.

［例 2］ 求方程组

$$\frac{dx}{dt}=2x+y,\quad \frac{dy}{dt}=-x \tag{2}$$

的形状如 $\boldsymbol{h}e^{\lambda t}$ 的解.

解 这时

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix},$$

它的特征方程是

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1=0.$$

所以 $\lambda=1$ 是它的二重特征值.

再求 A 相应于 $\lambda=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$.

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

所以
$$\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}c_1,$$

其中 c_1 是任一不为 0 的常数. 因此

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^t$$

即
$$x=c_1e^t,\ y=-c_1e^t$$

是方程组的解,但这里只含有一个任意常数 c_1,不可能表示方程组的全部解.

定理2 设 n 阶方阵 A 存在 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{h}_1$、$\boldsymbol{h}_2$、…、$\boldsymbol{h}_n$,依次对应于特征值 λ_1、λ_2、…、λ_n, 那末

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{h}_1e^{\lambda_1t}+c_2\boldsymbol{h}_2e^{\lambda_2t}+\cdots+c_n\boldsymbol{h}_ne^{\lambda_nt} \tag{3}$$

表示方程组(1)的全部解,其中 c_1、c_2、…、c_n 是 n 个任意常数.

注. 代数学已证明: 当方阵 A 的 n 个特征值互不相同时,它相应的 n 个特征向量是线性无关的, 因此, 如果方阵 A 的 n 个特征值互不相同,那末方程组(1)的解可用公式(3)表示.

证 容易证明(3)所表示的向量值函数是方程组(1)的解. 我们现在证明, 如果 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 是方程组(1)的解, 那末必存在 n 个常数 c_1^0、c_2^0、…、c_n^0 使得

$$\boldsymbol{x}_0(t)\equiv c_1^0\boldsymbol{h}_1e^{\lambda_1t}+c_2^0\boldsymbol{h}_2e^{\lambda_2t}+\cdots+c_n^0\boldsymbol{h}_ne^{\lambda_nt},$$

即(3)表示(1)的全部解. 事实上, 由于 $\boldsymbol{h}_1$、$\boldsymbol{h}_2$、…、$\boldsymbol{h}_n$ 是线性无关的,对于 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 在 $t=0$ 的值 $\boldsymbol{x}_0(0)$, 存在 c_1^0、c_2^0、…、c_n^0, 使得

$$\boldsymbol{x}_0(0)=c_1^0\boldsymbol{h}_1+c_2^0\boldsymbol{h}_2+\cdots+c_n^0\boldsymbol{h}_n,$$

那末解 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 和解 $c_1^0\boldsymbol{h}_1e^{\lambda_1t}+c_2^0\boldsymbol{h}_2e^{\lambda_2t}+\cdots+c_n^0\boldsymbol{h}_ne^{\lambda_nt}$ 在 $t=0$ 处相等,根据 §1 的定理 1 得到, 当 $-\infty<t<+\infty$ 时,

$$\boldsymbol{x}_0(t)\equiv c_1^0\boldsymbol{h}_1e^{\lambda_1t}+c_2^0\boldsymbol{h}_2e^{\lambda_2t}+\cdots+c_n^0\boldsymbol{h}_ne^{\lambda_nt}.$$

定理证毕。

例 2 中的 A 不存在两个线性无关的特征向量，因此方程组(2)的通解不能用(3)来表示。

现在讨论一般情形下方程组(1)的解的表达式。我们已经知道，常系数齐次线性微分方程当特征根为 k 重根时具有形状为 $e^{\lambda t}$、$te^{\lambda t}$、…、$t^{k-1}e^{\lambda t}$ 的解。因此，我们猜想，当 λ 是 A 的特征方程的重根时，方程组(1)除了有形状如 $\boldsymbol{h}e^{\lambda t}$ 的解外，还可能有形状如

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}(t)e^{\lambda t} \tag{4}$$

的解，其中 $\boldsymbol{p}(t)$ 是 t 的向量系数多项式

$$\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{a}_0\frac{t^k}{k!}+\boldsymbol{a}_1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}+\cdots+\boldsymbol{a}_k, \tag{5}$$

这里 $\boldsymbol{a}_0$、$\boldsymbol{a}_1$、…、$\boldsymbol{a}_k$ 是 n 维向量，至少有一个不为 $\boldsymbol{0}$。如果 $\boldsymbol{a}_0\neq\boldsymbol{0}$，就称向量系数多项式 $\boldsymbol{p}(t)$ 的次数为 k，记为 $\partial\boldsymbol{p}=k$。当 $\boldsymbol{p}(t)\equiv\boldsymbol{h}$ 时，它是零次多项式。

不难验证：当且仅当 $\boldsymbol{p}(t)$ 和 λ 满足关系式

$$A\boldsymbol{p}(t)\equiv\lambda\boldsymbol{p}(t)+\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t) \tag{6}$$

时，表达式(4)是方程组(1)的解。在(6)的两端比较 t 的同次幂的向量系数，得到 $\boldsymbol{p}(t)$ 和 λ 满足关系式(6)的充要条件是

$$\begin{aligned} &A\boldsymbol{a}_0=\lambda\boldsymbol{a}_0,\\ &A\boldsymbol{a}_1=\lambda\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &A\boldsymbol{a}_k=\lambda\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{a}_{k-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

因此，得到下述结论：

1° 如果(4)是方程组(1)的解，那末 λ 是 A 的特征值，$\boldsymbol{a}_0$ 是相应的特征向量。

2° 如果 $\boldsymbol{p}(t)\equiv\boldsymbol{a}_0\dfrac{t^k}{k!}+\boldsymbol{a}_1\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}+\cdots+\boldsymbol{a}_k$ 和 λ 满足关系式(6)，那末 $\dfrac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt}\equiv\boldsymbol{a}_0\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}+\boldsymbol{a}_1\dfrac{t^{k-2}}{(k-2)!}+\cdots+\boldsymbol{a}_{k-1}$ 和 λ 也满足关系式(6)。

因此，如果 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}(t)e^{\lambda t}$ 是方程组(1)的解，那末

$$\boldsymbol{x}=\frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt}e^{\lambda t}$$

也是方程组(1)的解.

3° 如果 $\boldsymbol{p}(t)$ 和 λ 满足关系式(6)，$\boldsymbol{a}_0\neq\boldsymbol{0}$，那末

$$\boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k,$$

即
$$\frac{d^k\boldsymbol{p}(0)}{dt^k},\ \frac{d^{k-1}\boldsymbol{p}(0)}{dt^{k-1}},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}(0)$$

是线性无关的.

否则，如果它们是线性相关的，就存在 $k+1$ 个不全为 0 的数 α_0、α_1、$\cdots$、α_k 使得

$$\alpha_0\boldsymbol{a}_0+\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{0}.\tag{8}$$

以 α_0 乘(7)的第一式、α_1 乘(7)的第二式、$\cdots$、α_k 乘(7)的最后一式，然后相加得

$$\begin{aligned}&A(\alpha_0\boldsymbol{a}_0+\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k)\\&\quad=(\alpha_0\boldsymbol{a}_0+\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k)\lambda+\alpha_1\boldsymbol{a}_0+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_{k-1}.\end{aligned}$$

注意到(8)式得

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_0+\alpha_2\boldsymbol{a}_1+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_{k-1}=\boldsymbol{0}.$$

利用同样方法，逐次可得

$$\begin{aligned}&\alpha_2\boldsymbol{a}_0+\alpha_3\boldsymbol{a}_1+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_{k-2}=\boldsymbol{0},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\alpha_{k-1}\boldsymbol{a}_0+\alpha_k\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{0},\\&\alpha_k\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{a}_0\neq\boldsymbol{0}$，由上面最后一式得 $\alpha_k=0$，代入倒数第二式得 $\alpha_{k-1}=0$，这样逐次可证

$$\alpha_k=\alpha_{k-1}=\cdots=\alpha_1=\alpha_0=0,$$

它与 α_0、α_1、$\cdots$、α_k 不全为 0 矛盾. 所以，$\boldsymbol{a}_0$、$\boldsymbol{a}_1$、$\cdots$、$\boldsymbol{a}_k$ 是线性无关的.

代数学上称适合关系式(7)的 $\boldsymbol{a}_0$、$\boldsymbol{a}_1$、$\cdots$、$\boldsymbol{a}_k$ 为 A 相应于 λ 的循环向量，我们称 $\boldsymbol{p}(t)$ 为 A 的相应于特征值 λ 的循环向量系数多

项式.

例如，对于方程组(2)，

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix},$$

$\lambda=1$ 是它的二重特征值. 我们已求出 $\boldsymbol{a}_0=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$是 A 相应于 $\lambda=1$ 的特征向量，并且只有这一个特征向量. 为求方程组(2)的解我们再求形状如

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right\}e^t$$

的解. 把它代入方程组(2)得到

$$h_1+1=2h_1+h_2,$$

$$h_2-1=-h_1.$$

所以

$$h_1+h_2=1.$$

若取 $h_2=0$，那末 $h_1=1$. 从而

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+1\\t\end{pmatrix}$$

是 A 的相应于 $\lambda=1$ 的一个循环向量系数多项式. 当 $t=0$ 时，它是$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$而与 A 相应于 $\lambda=1$ 的特征向量$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$是线性无关的，所以

$$x=\{c_1+c_2(t+1)\}e^t,$$

$$y=(-c_1-c_2t)e^t$$

是方程组(2)的解. 并且对于任给 x_0, y_0，我们可以选择 c_1 和 c_2 使得

$$x_0=c_1+c_2,\ y_0=-c_1.$$

所以 $c_1=-y_0$, $c_2=x_0+y_0$. 因此

$$x=-y_0e^t+(x_0+y_0)(t+1)e^t,$$

$$y=y_0e^t-(x_0+y_0)te^t$$

是以$(0,\ x_0,\ y_0)$为初值的解.

该例题表明，虽然方程组(2)系数矩阵 A 的特征向量只有 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，但它有两个循环向量系数的多项式，一是零次多项式，即特征向量 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$；另一是 $\begin{pmatrix}t+1\\-t\end{pmatrix}$。它们在 $t=0$ 时是线性无关的。即相应于二重特征值 $\lambda=1$，A 有两个循环向量系数多项式 $\boldsymbol{p}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{p}_2(t)$，它们在 $t=0$ 是线性无关的。利用它们就可得方程组(2)的通解。

对于方程组(1)，我们可以证明下述定理。

定理3 设方程组(1)的系数矩阵 A 的 n 个特征值是 λ_1、λ_2、$\cdots$、λ_n（它们之间可能有相同的），那末存在 n 个循环向量系数多项式 $\boldsymbol{p}_1(t)$、$\boldsymbol{p}_2(t)$、$\cdots$、$\boldsymbol{p}_n(t)$，使得 $\boldsymbol{p}_1(0)$、$\boldsymbol{p}_2(0)$、$\cdots$、$\boldsymbol{p}_n(0)$ 是线性无关的，并且方程组(1)的解可表示为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{p}_j(t)e^{\lambda_j t}, \tag{9}$$

其中 c_1、c_2、$\cdots$、c_n 是 n 个任意常数。

注. 因为 $\boldsymbol{p}_j(t)e^{\lambda_j t}$ 是方程组(1)的解，所以 $\boldsymbol{p}_j(t)$ 是 A 相应于 λ_j 的循环向量系数多项式。该定理表明，尽管 A 的不同特征值的个数可能小于 n，但是 n 个线性无关的循环向量系数多项式是存在的。我们还将证明，$\boldsymbol{p}_j(t)$ 的次数小于特征值 λ_j 的重数。

为证明该定理，先证明下述引理。

引理 设 $\varphi_1(t)$、$\varphi_2(t)$、$\cdots$、$\varphi_k(t)$ 是 k 个多项式，λ_1、λ_2、$\cdots$、λ_k、λ_{k+1} 是常数，那末一阶线性常微分方程

$$\frac{dy}{dt}=\lambda_{k+1}y+\varphi_1(t)e^{\lambda_1 t}+\cdots+\varphi_k(t)e^{\lambda_k t}$$

的解可表示成

$$y=\psi_1(t)e^{\lambda_1 t}+\cdots+\psi_k(t)e^{\lambda_k t}+ce^{\lambda_{k+1}t},$$

其中 c 是任意常数，$\psi_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, k)$ 是 t 的多项式。当 $\lambda_j\neq\lambda_{k+1}$ 时，$\psi_j(t)$ 的次数 $\partial\psi_j$ 等于 $\varphi_j(t)$ 的次数 $\partial\varphi_j$；当 $\lambda_j=\lambda_{k+1}$ 时，$\psi_j(t)$ 的次数 $\partial\psi_j=\partial\varphi_j+1$。

证 因为

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda_{k+1}t}y)=\sum_{j=1}^{k}\varphi_j(t)e^{(\lambda_j-\lambda_{k+1})t},$$

两边积分得到

$$e^{-\lambda_{k+1}t}y=c+\sum_{j=1}^{k}\int\varphi_j(t)e^{(\lambda_j-\lambda_{k+1})t}\,dt.$$

当 $\lambda_j=\lambda_{k+1}$ 时，

$$\int\varphi_j(t)e^{(\lambda_j-\lambda_{k+1})t}\,dt=\int\varphi_j(t)\,dt=\psi_j(t),$$

而 $\partial\psi_j=\partial\varphi_j+1$；当 $\lambda_j\neq\lambda_{k+1}$ 时，运用分部积分法可得到

$$\int\varphi_j(t)e^{(\lambda_j-\lambda_{k+1})t}\,dt=\psi_j(t)e^{(\lambda_j-\lambda_{k+1})t},$$

而 $\partial\psi_j=\partial\varphi_j$. 引理就此得证.

定理 3 的证明 根据代数学的许尔(Schur)定理，存在满秩线性变换 $\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}$，它将方程组(1)化为

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=T^{-1}AT\boldsymbol{y}, \tag{10}$$

而 $T^{-1}AT$ 是下三角阵，即方程组(10)呈如下形状：

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt}=\lambda_1y_1,\\
&\frac{dy_2}{dt}=b_{21}y_1+\lambda_2y_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dy_n}{dt}=b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,n-1}y_{n-1}+\lambda_ny_n,
\end{aligned} \tag{11}$$

这里 λ_1、λ_2、…、λ_n 是 A 的特征值.

方程组(11)可以从上到下逐个求解. 由第一式得

$$y_1=c_1e^{\lambda_1t},$$

代入第二式得

$$\frac{dy_2}{dt}=c_1b_{21}e^{\lambda_1t}+\lambda_2y_2,$$

根据引理知 $$y_2=c_1\varphi_{21}(t)e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t},$$

其中 $\varphi_{21}(t)$ 是 t 的多项式. 当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时 $\partial\varphi_{21}=0$；当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，

$\partial\varphi_{21}=1$. 如果已经解得 $y_1, y_2, \cdots, y_k$:

$$y_1=c_1e^{\lambda_1 t},$$
$$y_2=c_1\varphi_{21}(t)e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_k=c_1\varphi_{k1}(t)e^{\lambda_1 t}+c_2\varphi_{k2}(t)e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ke^{\lambda_k t},$$

而 $\varphi_{ki}(t)$的次数 $\partial\varphi_{ki}$ 小于 λ_i 在 λ_1、$\cdots$、λ_k 中出现的次数. 把它代入第 $k+1$ 个方程得到

$$\frac{dy_{k+1}}{dt}=\lambda_{k+1}y_{k+1}+\sum_{j=1}^{k}c_j\tilde{\varphi}_{k+1,j}(t)e^{\lambda_j t},$$

其中 $\tilde{\varphi}_{k+1,j}(t)$的次数 $\partial\tilde{\varphi}_{k+1,j}$ 小于 λ_j 在 λ_1、λ_2、$\cdots$、λ_k 中出现的次数. 根据引理得到

$$y_{k+1}=\sum_{j=1}^{k}c_j\varphi_{k+1,j}(t)e^{\lambda_j t}+c_{k+1}e^{\lambda_{k+1}t},$$

其中 $\partial\varphi_{k+1,j}=\partial\tilde{\varphi}_{k+1,j}+1$ (当 $\lambda_j=\lambda_{k+1}$ 时); $\partial\varphi_{k+1,j}=\partial\tilde{\varphi}_{k+1,j}$(当 $\lambda_j\neq\lambda_{k+1}$ 时). 所以 $\partial\varphi_{k+1,j}$ 小于 λ_j在λ_1、λ_2、$\cdots$、λ_{k+1} 中出现的次数.

因此得到

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\\varphi_{21}(t)\\\vdots\\\varphi_{n1}(t)\end{pmatrix}e^{\lambda_1 t}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\\varphi_{n2}(t)\end{pmatrix}e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_n\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}e^{\lambda_n t},$$

其中 $\partial\varphi_{k,j}(j=1, 2, \cdots, k-1;\ k=1, 2, \cdots, n)$小于 λ_j 在 λ_1、λ_2、$\cdots$、λ_k 中出现的次数. 于是方程组(1)的解可表成

$$\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}=c_1T\begin{pmatrix}1\\\varphi_{21}(t)\\\vdots\\\varphi_{n1}(t)\end{pmatrix}e^{\lambda_1 t}+c_2T\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\\varphi_{n2}(t)\end{pmatrix}e^{\lambda_2 t}$$
$$+\cdots+c_nT\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}e^{\lambda_n t}, \tag{12}$$

即得 $$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{p}_1(t)e^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{p}_2(t)e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_n\boldsymbol{p}_n(t)e^{\lambda_n t},$$

其中 $\boldsymbol{p}_j(t)$ 的次数小于特征值 λ_j 的重数. 并且由(12)得到

$$\det(\boldsymbol{p}_1(0)\ \boldsymbol{p}_2(0)\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n(0))$$

$$=\det\left\{T\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ * & & \ddots \\ & & & 1\end{pmatrix}\right\}=\det T\neq 0,$$

所以 $\boldsymbol{p}_1(0)$、$\boldsymbol{p}_2(0)$、$\cdots$、$\boldsymbol{p}_n(0)$ 是线性无关的. 定理证毕.

由定理 3 的证明知道: 如果 λ 是 A 的 l 重特征值, 那末相应于 λ 的循环向量系数多项式 $\boldsymbol{p}(t)$ 的次数 k 小于 l. 设 $\boldsymbol{p}(t)$ 如(5)所示, 那末成立着等式(7). 它的每一行都是形状

$$A_\lambda\xi\equiv(A-\lambda I)\xi=\eta \tag{13}$$

的线性代数方程组. 我们应给出它的可解条件及解的表达式, 以便在依次求 $\boldsymbol{a}_0$、$\boldsymbol{a}_1$、$\cdots$、$\boldsymbol{a}_k$ 时加以利用. 这种求解方法称为待定向量系数法. 如果到某一步发生可解条件不满足, 就说明循环向量系数多项式的次数不能再高了. 为了理解这种求解方法的具体过程, 我们看一些例题.

[例 3] 求常微分方程组

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2+x_3,$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_1+x_2-x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt}=x_2+x_3$$

的通解.

解 系数矩阵 A 的特征方程是

$$|A-\lambda I|=-\lambda(\lambda-1)^2=0,$$

它有三个特征值 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

由于 $\lambda_1=0$ 是单根, A 相应于 $\lambda_1=0$ 的特征向量 $\boldsymbol{h}$ 满足

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

即 $$h_2+h_3=0,\ h_1+h_2-h_3=0.$$

因此 $h_1=2,\ h_2=-1,\ h_3=1$ 是它的一个非零解，即 $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的特征向量，而

$$x=c_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

是微分方程组的解，其中 c_1 是任意常数.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$，它们是 A 的二重特征值.

这时，方程组(13)是

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{aligned}-\xi_1+\xi_2+\xi_3&=\eta_1,\\ \xi_1-\xi_3&=\eta_2,\\ \xi_2&=\eta_3.\end{aligned}$$

它的可解条件是

$$\eta_1+\eta_2-\eta_3=0.$$

先求对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的 A 的特征向量 $\boldsymbol{a}_0$. 它满足

$$A_1\boldsymbol{a}_0=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{a}_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

显然
$$\boldsymbol{a}_0=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

是 A 相应于特征值 1 的特征向量.

再求 $\boldsymbol{a}_1$ 使得

$$\boldsymbol{p}_2(t)\equiv\boldsymbol{a}_0t+\boldsymbol{a}_1$$

是 A 相应于 1 的循环向量系数多项式，这时 $\boldsymbol{a}_1$ 应适合

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \tag{14}$$

右端向量满足可解条件

$$\eta_1+\eta_2-\eta_3=0,$$

并且(14)具有解

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

因此，

$$\boldsymbol{p}_2(t)=\boldsymbol{a}_0 t+\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}t\\1\\t\end{pmatrix}$$

是循环向量系数多项式．方程组具有如下形状的解

$$\boldsymbol{x}=\left(c_2\boldsymbol{p}_2(t)+c_3\frac{d\boldsymbol{p}_2(t)}{dt}\right)e^t=c_2\begin{pmatrix}t\\1\\t\end{pmatrix}e^t+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^t,$$

其中 c_2 和 c_3 是两个任意常数．微分方程组的通解是

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}t\\1\\t\end{pmatrix}e^t+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^t,$$

即

$$x_1=2c_1+(c_2t+c_3)e^t,$$
$$x_2=-c_1+c_2e^t,$$
$$x_3=c_1+(c_2t+c_3)e^t,$$

其中 c_1、c_2 和 c_3 是三个任意常数．

[例 4]　求常微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,$$

$$\frac{dy}{dt}=-x$$

的实解．

解 系数矩阵的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，所以 $\lambda_1=i$ 和 $\lambda_2=-i$ 都是单重特征值．而微分方程组的通解是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=c_1\boldsymbol{h}_1e^{it}+c_2\boldsymbol{h}_2e^{-it},$$

其中 $\boldsymbol{h}_1$ 和 $\boldsymbol{h}_2$ 分别是 A 对应于特征值 i 和 $-i$ 的特征向量，c_1 和 c_2 是两个任意的复常数．

从 $A\boldsymbol{h}_1=i\boldsymbol{h}_1$ 得到

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{h}_1=i\boldsymbol{h}_1,$$

所以 $\boldsymbol{h}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ 是 A 对应于特征值 i 的特征向量．同样 $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ 是 A 对应于特征值 $-i$ 的特征向量．所以，微分方程组的通解是

$$x=c_1e^{it}+c_2e^{-it},$$
$$y=c_1ie^{it}-c_2ie^{-it},$$

其中 c_1 和 c_2 是两个任意的复常数．如果要找出方程的实解，应当有 $\bar{x}(t)\equiv x(t)$，$\bar{y}(t)\equiv y(t)$，即

$$\bar{c}_1e^{-it}+\bar{c}_2e^{it}=c_1e^{it}+c_2e^{-it},$$
$$-\bar{c}_1ie^{-it}+\bar{c}_2ie^{it}=c_1ie^{it}-c_2ie^{-it},$$

从而得到 $c_2=\bar{c}_1$．若记 $c_1=\frac{1}{2}(A-iB)$，其中 A 和 B 是两个任意的实数，那末

$$x=A\cos t+B\sin t,$$
$$y=-A\sin t+B\cos t$$

是微分方程组的实解．

一般地，如果方程组(1)的系数矩阵 A 具有一对共轭复数的特征值 $\lambda=\alpha+i\beta$ 和 $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$，其中 α 和 β 是实数，$\beta\neq0$，那末方程组(1)具有如下形状的实解：

$$\boldsymbol{x}=e^{\alpha t}\{\boldsymbol{p}(t)\cos\beta t+\boldsymbol{q}(t)\sin\beta t\},\tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{p}(t)$ 和 $\boldsymbol{q}(t)$ 是自变量 t 的实向量多项式，它们的次数小于 λ 的重数．

解(15)的形状与n阶常系数线性微分方程实解的形状类似。不同之处在于(15)中的向量系数多项式$\boldsymbol{p}(t)$和$\boldsymbol{q}(t)$的向量系数需要利用微分方程组来确定，而对于n阶方程，多项式$p(t)$和$q(t)$的系数是任意的实常数。

[例 5]　求常微分方程组

$$\frac{dx_1}{dt}=-4x_1+x_2+3x_3+2x_4,$$

$$\frac{dx_2}{dt}=-2x_1-x_2+2x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt}=-3x_1+x_2+2x_3+2x_4$$

$$\frac{dx_4}{dt}=x_1-x_3-x_4$$

的通解.

解　所给方程组的系数矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 3 & 2\\ -2 & -1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix},$$

A 的特征多项式是

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-4-\lambda & 1 & 3 & 2\\ -2 & -1-\lambda & 2 & 0\\ -3 & 1 & 2-\lambda & 2\\ 1 & 0 & -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}.$$

上式中的第一行减去第三行，第四行乘以2加到第二行得

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 1+\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda & 0 & -2-2\lambda\\ -3 & 1 & 2-\lambda & 2\\ 1 & 0 & -1 & -1-\lambda\end{vmatrix},$$

上式中的第一列加到第三列，第二列乘以 -2 加到第四列得

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^4.$$

因此 A 的特征值是 -1，并且是四重的.

这时方程组(13)，$A_{-1}\xi=\eta$ 是

$$\begin{aligned} &-3\xi_1+\xi_2+3\xi_3+2\xi_4=\eta_1, \\ &-2\xi_1+2\xi_3=\eta_2, \\ &-3\xi_1+\xi_2+3\xi_3+2\xi_4=\eta_3, \\ &\xi_1-\xi_3=\eta_4. \end{aligned} \tag{16}$$

它的可解条件是

$$\eta_1=\eta_3,\ \eta_2+2\eta_4=0, \tag{17}$$

如果可解条件成立，方程组(16)的解可表示为

$$\begin{aligned} &\xi_1=\xi_3+\eta_4, \\ &\xi_2=-2\xi_4+\eta_3+3\eta_4, \end{aligned} \tag{18}$$

其中 ξ_3、ξ_4 可以是任意常数.

先来确定 A 的特征向量 α_0. 这时 $\eta=0$ 满足条件(17)，取 $\xi_4=0$, $\xi_3=1$ 和 $\xi_4=1$, $\xi_3=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

都是特征向量，分别记为 α_0^1 和 α_0^2.

再分别就 α_0^1 和 α_0^2 决定方程组(7)中的 α_1. 当 $\eta=\alpha_0^1$ 时，方程组(16)成为 $A_{-1}\alpha_1^1=\alpha_0^1$，可解条件(17)满足，所以在(18)中取 $\xi_3=\xi_4=0$ 时得 $\xi_1=0$, $\xi_2=1$，即

$$\alpha_1^1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

从而

$$\boldsymbol{p}_1(t)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\1\\t\\0\end{pmatrix}$$

是循环向量系数多项式. 然后,对于方程组(16), 若取 $\eta=\boldsymbol{\alpha}_1^1$, 那末可解条件(17)不满足, 所以对于 $\boldsymbol{\alpha}_0^1$, 循环向量系数多项式的次数小于 2.

当 $\eta=\boldsymbol{\alpha}_0^2$ 时, 方程组(16)成为 $A_{-1}\boldsymbol{\alpha}_1^2=\boldsymbol{\alpha}_0^2$, 可解条件(17)满足,所以在(18)中取 $\xi_3=\xi_4=0$,得到 $\xi_1=1$, $\xi_2=3$,即

$$\boldsymbol{\alpha}_1^2=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix}.$$

从而

$$\boldsymbol{p}_2(t)=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3-2t\\0\\t\end{pmatrix}$$

是循环向量系数多项式. 然后,对于方程组(16), 若取 $\eta=\boldsymbol{\alpha}_1^2$, 那末可解条件(17)不满足, 所以对于 $\boldsymbol{\alpha}_0^2$, 循环向量系数多项式的次数也小于 2.

由于循环向量系数多项式的性质 2°, $\dfrac{d\boldsymbol{p}_1(t)}{dt}$ 和 $\dfrac{d\boldsymbol{p}_2(t)}{dt}$ 也是循环向量系数多项式,并且由于

$$\left(\boldsymbol{p}_1(0),\ \frac{d\boldsymbol{p}_1(0)}{dt},\ \boldsymbol{p}_2(0),\ \frac{d\boldsymbol{p}_2(0)}{dt}\right)=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&3&-2\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

的行列式为 $1\neq0$,所以

$$\boldsymbol{x}=\left(c_1\boldsymbol{p}_1(t)+c_2\frac{d\boldsymbol{p}_1(t)}{dt}+c_3\boldsymbol{p}_2(t)+c_4\frac{d\boldsymbol{p}_2(t)}{dt}\right)e^{-t}$$

$$=\left\{c_1\begin{pmatrix}t\\1\\t\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\3-2t\\0\\t\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}e^{-t},$$

即

$$\begin{aligned}x_1&=(c_1t+c_2+c_3)e^{-t},\\x_2&=(c_1+3c_3-2c_3t-2c_4)e^{-t},\\x_3&=(c_1t+c_2)e^{-t},\\x_4&=(c_3t+c_4)e^{-t}\end{aligned}$$

是微分方程组的通解，其中 c_1、c_2、c_3 和 c_4 是任意常数.

该例表明，当特征值的重数为 4 时，循环向量系数多项式的次数可以小于 3，而是 1；并且具有两个特征向量 $(1, 0, 1, 0)^T$ 和 $(0, -2, 0, 1)^T$.

下面的定理给出微分方程组(1)的解当 $t\to+\infty$ 时的性状.

定理 4 如果 n 阶方阵 A 的特征值 λ_j 的实部都不大于 α，即 $\mathrm{Re}\lambda_j\leqslant\alpha(j=1, 2, \cdots, n)$，并且满足 $\mathrm{Re}\lambda_j=\alpha$ 的特征值所对应的循环向量系数多项式的次数为 0，那末必存在正数 $M>0$，使得对于方程组(1)的解 $\boldsymbol{x}(t)$，不等式

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}(0)\|e^{\alpha t}\tag{19}$$

在 $0\leqslant t<+\infty$ 中成立. 特别，如果 A 的特征值 λ_j 的实部都小于 α，即 $\mathrm{Re}\,\lambda_j<\alpha(j=1, 2, \cdots, n)$，那末(19)成立.

证 根据定理 3，方程组(1)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 可表示成

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1\boldsymbol{p}_1(t)e^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{p}_2(t)e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_n\boldsymbol{p}_n(t)e^{\lambda_n t},$$

因此

$$\boldsymbol{x}(0)=c_1\boldsymbol{p}_1(0)+c_2\boldsymbol{p}_2(0)+\cdots+c_n\boldsymbol{p}_n(0)$$

$$=(\boldsymbol{p}_1(0)\ \ \boldsymbol{p}_2(0)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{p}_n(0))\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix},$$

若记 $P(0)=(\boldsymbol{p}_1(0)\ \boldsymbol{p}_2(0)\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n(0))$，由于 $\boldsymbol{p}_1(0),\ \boldsymbol{p}_2(0),\ \cdots,$ $\boldsymbol{p}_n(0)$是线性无关的，所以 $P(0)$的逆阵 $P^{-1}(0)$存在，所以

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=P^{-1}(0)\boldsymbol{x}(0),$$

因此

$$\boldsymbol{x}(t)=(\boldsymbol{p}_1(t)e^{\lambda_1 t}\ \boldsymbol{p}_2(t)e^{\lambda_2 t}\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n(t)e^{\lambda_n t})P^{-1}(0)\boldsymbol{x}(0). \tag{20}$$

再来估计 $\boldsymbol{p}_j(t)e^{\lambda_j t}$．如果 $\operatorname{Re}\lambda_j<\alpha$，那末 $\operatorname{Re}\lambda_j-\alpha<0$，而

$$\|\boldsymbol{p}_j(t)e^{\lambda_j t}\|e^{-\alpha t}=\|\boldsymbol{p}_j(t)\|e^{(\operatorname{Re}\lambda_j-\alpha)t},$$

当 $t\to+\infty$ 时上式右端趋于 0，所以它在 $0\leqslant t<+\infty$ 中有界，即存在常数 $M_j>0$ 使得当 $0\leqslant t<+\infty$ 时，

$$\|\boldsymbol{p}_j(t)e^{\lambda_j t}\|e^{-\alpha t}\leqslant M_j,$$

即

$$\|\boldsymbol{p}_j(t)e^{\lambda_j t}\|\leqslant M_je^{\alpha t}. \tag{21}$$

如果 $\operatorname{Re}\lambda_j=\alpha$，根据假设 $\boldsymbol{p}_j(t)$的次数为 0，即 $\boldsymbol{p}_j(t)\equiv\boldsymbol{p}_j(0)$，因此当 $0\leqslant t<+\infty$ 时，

$$\|\boldsymbol{p}_j(t)e^{\lambda_j t}\|=\|\boldsymbol{p}_j(0)\|e^{\alpha t}=M_je^{\alpha t},$$

这里已记 $M_j=\|\boldsymbol{p}_j(0)\|$．

这就是说，对于 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，不等式(21)成立．

从公式(20)有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant&\|(\boldsymbol{p}_1(t)e^{\lambda_1 t}\ \boldsymbol{p}_2(t)e^{\lambda_2 t}\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n(t)e^{\lambda_n t})\|\\&\cdot\|P^{-1}(0)\|\cdot\|\boldsymbol{x}(0)\|.\end{aligned} \tag{22}$$

但根据不等式(21)，当 $0\leqslant t<+\infty$ 时，

$$\begin{aligned}&\|(\boldsymbol{p}_1(t)e^{\lambda_1 t}\ \boldsymbol{p}_2(t)e^{\lambda_2 t}\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n(t)e^{\lambda_n t})\|\\&=\sqrt{\|\boldsymbol{p}_1(t)e^{\lambda_1 t}\|^2+\cdots+\|\boldsymbol{p}_n(t)e^{\lambda_n t}\|^2}\\&\leqslant\sqrt{M_1^2+M_2^2+\cdots+M_n^2}\,e^{\alpha t}.\end{aligned}$$

若记 $M=\sqrt{M_1^2+M_2^2+\cdots+M_n^2}\,\|P^{-1}(0)\|$，那末由上式和(22)得到

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}(0)\|e^{\alpha t}$$

在 $0\leqslant t<+\infty$ 中成立．

根据定理 4 可证明下述定理：

定理 5 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，那末

1° 方程组(1)的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足

$$\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$$

的充要条件是

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0 \quad (j=1, 2, \cdots, n);$$

2° 方程组 (1) 的每一解 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $0 \leqslant t < +\infty$ 中有界的充要条件是

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j \leqslant 0 \quad (j=1, 2, \cdots, n),$$

并且当 $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$ 时 $\partial \boldsymbol{p}_j = 0$；

3° 方程组(1)有在 $0 \leqslant t < +\infty$ 中无界的解的充要条件是：存在 λ_{j_0} 使得 $\mathrm{Re}\,\lambda_{j_0} > 0$ 或者 $\mathrm{Re}\,\lambda_{j_0} = 0$ 而 $\partial \boldsymbol{p}_{j_0} > 0$.

如何决定 $\boldsymbol{p}_j$ 的次数 $\partial \boldsymbol{p}_j$ 呢？它与方阵 A 的性质有什么关系？定理 3 仅指出 $\partial \boldsymbol{p}_j$ 小于 λ_j 的重数．为了完整地回答这个问题，我们来讨论它与线性代数中关于方阵 A 的若当(Jordan)标准型理论之间的关系.

线性代数中证明了下述结论：对于方阵 A，存在满秩方阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 呈若当标准型

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s \end{bmatrix},$$

其中若当块 J_j 是 n_j 阶方阵

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_j & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{bmatrix},$$

而 λ_j 是方阵 A 的特征值，n_j 不大于 λ_j 的重数，并且

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n.$$

如果引进变量变换

$$x = Ty = T\begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^s \end{bmatrix},$$

而 $y^j = (y_1^j \ y_2^j \ \cdots \ y_{n_j}^j)^T$，那末方程组(1)变为

$$\frac{dy^j}{dt} = J_j y^j \quad (j=1, 2, \cdots, s),$$

即

$$\frac{dy_1^j}{dt} = \lambda_j y_1^j, \quad \frac{dy_2^j}{dt} = y_1^j + \lambda_j y_2^j, \quad \cdots, \quad \frac{dy_{n_j}^j}{dt} = y_{n_j-1}^j + \lambda_j y_{n_j}^j$$

$$(j=1, 2, \cdots, s) \tag{23}$$

依次求解该方程组就得到

$$\begin{aligned} &y_1^j = c_1^j e^{\lambda_j t}, \\ &y_2^j = (c_1^j t + c_2^j) e^{\lambda_j t}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad (j=1, 2, \cdots, s), \\ &y_{n_j}^j = \sum_{l=1}^{n_j} c_l^j \frac{t^{n_j-l}}{(n_j-l)!} e^{\lambda_j t}, \end{aligned} \tag{24}$$

这里 $c_l^j (l=1, 2, \cdots, n_j; j=1, 2, \cdots, s)$是任意常数。如果置

$$q^j(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ \dfrac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \end{bmatrix},$$

那末
$$y^j = \sum_{l=1}^{n_j} c_l^j \frac{d^{l-1}}{dt^{l-1}} \{q^j(t)\} e^{\lambda_j t}$$

是微分方程组(23)的解。置

$$p^j(t) = T\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ q^j(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中 $q^j(t)$处于第 j 个位置，每个位置是 n_j 维向量，那末

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=1}^{n_j}c_l^j\,\frac{d^{l-1}\boldsymbol{p}^j(t)}{dt^{l-1}}\,e^{\lambda_j t}\tag{25}$$

是方程组(1)的解，记

$$\boldsymbol{p}_l^j(t)=\frac{d^{l-1}\boldsymbol{p}^j(t)}{dt^{l-1}},$$

那末方程组(1)的解可表示为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=1}^{n_j}c_l^j\,\boldsymbol{p}_l^j(t)e^{\lambda_j t},$$

并且

$$\begin{aligned}
&\det(\boldsymbol{p}_1^1(0)\cdots\boldsymbol{p}_{n_1}^1(0)\boldsymbol{p}_1^2(0)\cdots\boldsymbol{p}_{n_2}^2(0)\cdots\boldsymbol{p}_{n_s}^s(0))\\
&=\det T\begin{bmatrix}
\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}&&&\\
&\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}&&\\
&&\ddots&\\
&&&\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}
\end{bmatrix}\\
&=\det T\neq 0.
\end{aligned}$$

因此，证明了定理3的加强形式

定理6 对于方程组(1)，存在 n 个循环向量系数多项式 $\boldsymbol{p}_l^j(t)(j=1,\ 2,\ \cdots,\ s;\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ n_j)$ 使得方程组(1)的解可表示为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=1}^{n_j}c_l^j\,\boldsymbol{p}_l^j(t)e^{\lambda_j t},\tag{26}$$

其中 $c_l^j(l=1,\ 2,\ \cdots,\ n_j;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 是任意常数，并且

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{p}_l^j(t)}{dt}\equiv\boldsymbol{p}_{l+1}^j(t)\quad(l=1,\ 2,\ \cdots,\ n_j-1),\\
&\frac{d\boldsymbol{p}_{n_j}^j(t)}{dt}\equiv\boldsymbol{0}.
\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

由于已知，如果 $\boldsymbol{p}(t)$ 是 A 的循环向量系数多项式，那末 $\frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt}$ 或者恒为 $\mathbf{0}$，或者也是 A 的循环向量系数多项式，因此，定理 6 是定理 3 的加强形式，即指明了定理 3 中的 $\boldsymbol{p}_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 可以分成 s 组，并且每一组满足关系式(27)。

反之，我们可以直接证明定理 6. 因为对于 A 的每个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_0^1, \boldsymbol{\alpha}_0^2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_0^s$，我们可以作出与之相应的最高次数为 $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 的循环向量系数多项式 $\boldsymbol{p}^1(t), \boldsymbol{p}^2(t), \cdots, \boldsymbol{p}^s(t)$，然后对这些循环向量系数多项式的每一个，如 $\boldsymbol{p}^j(t)$，取 $\frac{d\boldsymbol{p}^j(t)}{dt}, \cdots, \frac{d^{n_j-1}\boldsymbol{p}^j(t)}{dt^{n_j-1}}$，它们都是循环向量系数多项式，对每一组适当编号，即可使之满足(27)．这样我们有

$$A\boldsymbol{p}_l^j(t)=\lambda_j\boldsymbol{p}_l^j(t)+\boldsymbol{p}_{l+1}^j(t)\quad(l=1, 2, \cdots, n_j-1),$$
$$A\boldsymbol{p}_{n_j}^j(t)=\lambda_j\boldsymbol{p}_{n_j}^j(t),$$

从而有

$$A\boldsymbol{p}_l^j(0)=\lambda_j\boldsymbol{p}_l^j(0)+\boldsymbol{p}_{l+1}^j(0)\quad(l=1, 2, \cdots, n_j-1),$$
$$A\boldsymbol{p}_{n_j}^j(0)=\lambda_j\boldsymbol{p}_{n_j}^j(0).$$

又因为 $\boldsymbol{p}_l^j(0)$ $(l=1, \cdots, n_j;\ j=1, \cdots, s)$ 是线性无关的，从而构成 n 维空间的基向量，在该基下方阵 A 呈若当标准型．所以定理 6 既是方阵 A 的若当标准型定理的另一种叙述．也可以说通过定理 6 证明了方阵 A 的若当标准型定理．

习　题

1．求解下列常微分方程组：

1) $\frac{dx}{dt}=x+y,\quad \frac{dy}{dt}=-x-y;$

2) $\frac{dx}{dt}=-5x-y,\quad \frac{dy}{dt}=2x-3y;$

3) $\frac{dx}{dt}=-5x-y,\quad \frac{dy}{dt}=x-3y;$

4) $\frac{dx}{dt}=-x+y+z,\quad \frac{dy}{dt}=x-y+z,\quad \frac{dz}{dt}=x+y-z;$

5) $\frac{dx}{dt}=3x-8y,\quad \frac{dy}{dt}=2x-5y,\quad \frac{dz}{dt}=-x+2y-z;$

6) $\frac{dx}{dt}=2x-11y-6z,\quad \frac{dy}{dt}=2x-8y-4z,\quad \frac{dz}{dt}=-x+3y;$

7) $\frac{dx}{dt}+x+y=0,\quad \frac{dy}{dt}+y+z=0,\quad \frac{dz}{dt}-z=0;$

8) $\frac{dx}{dt}=2x+y+2z,\quad \frac{dy}{dt}=-x-2z,\quad \frac{dz}{dt}=z;$

9) $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=y+z,\quad \frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=z+x,\quad \frac{dz}{dt}+\frac{dx}{dt}=x+y;$

10) $3\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+x+3y=0,\quad 2\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+x+2y=0.$

2．设 A 和 B 是两个 n 阶方阵，$\det A\neq 0$，试讨论方程组

$$A\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}+B\boldsymbol{x}=0$$

的求解方法，并给出它的通解表达式．

3．试讨论常系数差分方程组

$$\boldsymbol{x}(t+1)=A\boldsymbol{x}(t)\quad (t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

的求解方法，并给出它的通解表达式．

4．利用定理3证明方程组(1)的初值问题的解存在且唯一．

5．设 $\boldsymbol{p}_1(t),\ \boldsymbol{p}_2(t),\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n(t)$ 是定理3中的循环向量系数多项式，$\boldsymbol{p}(t)$ 是方阵 A 相应于特征值 λ 的循环向量系数多项式，试证 $\boldsymbol{p}(t)$ 可以由 $\boldsymbol{p}_1(t)$、$\boldsymbol{p}_2(t)$、$\cdots$、$\boldsymbol{p}_n(t)$ 唯一地线性表示，即存在常数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n$ 使得

$$\boldsymbol{p}(t)=\sum_{j=1}^{n}c_j\boldsymbol{p}_j(t),$$

并且当 $\lambda_j\neq\lambda$ 时 $c_j=0$．

6．设 $\boldsymbol{q}_1(t)$、$\boldsymbol{q}_2(t)$、$\cdots$、$\boldsymbol{q}_n(t)$ 是方阵 A 相应于 μ_1、μ_2、$\cdots$、μ_n 的循环向量系数多项式，试证：表达式

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n}c_j\boldsymbol{q}_j(t)e^{\mu_j t}\quad (c_1、c_2、\cdots、c_n\text{ 是任意常数})$$

构成微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}$$

通解的充要条件是 $\boldsymbol{q}_1(0)$、$\boldsymbol{q}_2(0)$、$\cdots$、$\boldsymbol{q}_n(0)$ 线性无关．

7．设 λ 是方阵 A 的 k 重特征值，又 A 相应于 λ 的特征向量有 k 个是线性无关的，试证：A 相应于 λ 的循环向量系数多项式必是特征向量．

8．设方阵 A 有 s 个互不相同的特征值 μ_1、μ_2、$\cdots$、μ_s，它们的重数分别为 n_1、n_2、$\cdots$、n_s，$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$．如果 $\boldsymbol{p}_{j1}(t)$、$\boldsymbol{p}_{j2}(t)$、$\cdots$、$\boldsymbol{p}_{jn_j}(t)$ 是 A 相应于 μ_j 的循环向量系数多项式，且 $\boldsymbol{p}_{j1}(0)$、$\boldsymbol{p}_{j2}(0)$、$\cdots$、$\boldsymbol{p}_{jn_j}(0)$ 是线性无关的，试证：表达式

$$x=\sum_{j=1}^{s}(c_{j1}p_{j1}(t)+c_{j2}p_{j2}(t)+\cdots+c_{jn_j}p_{jn_j}(t))e^{\lambda_j t}$$

构成微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=Ax$$

的通解，这里 $c_{jk}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n_j;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$是 n 个任意常数。

9．利用定理 3 推导 n 阶常系数线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n x=0$$

的解的表达式。

*10．利用定理 3 证明凯莱(Cayley)-哈密顿(Hamilton)定理，即如果 A 是 n 阶方阵，A 的特征多项式是

$$|\lambda I-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n,$$

那末

$$A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_nI=0.$$

11．设 μ_1、μ_2、$\cdots$、μ_s 是互不相等的数，$q_1(t)$、$q_2(t)$、$\cdots$、$q_s(t)$是 t 的向量系数的多项式，试证明

$$q_1(t)e^{\mu_1 t}+q_2(t)e^{\mu_2 t}+\cdots+q_s(t)e^{\mu_s t}\equiv 0$$

的充要条件是

$$q_1(t)\equiv 0,\ q_2(t)\equiv 0,\ \cdots,\ q_s(t)\equiv 0.$$

12．试证：一阶微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=ax+by,$$

$$\frac{dy}{dt}=cx+dy$$

的解 $x(t)=(x(t),\ y(t))^T$ 只能有以下两种形状：

1° $x(t)=c_1h_1e^{\lambda_1 t}+c_2h_2e^{\lambda_2 t}$,

2° $x(t)=[c_1h_1+c_2(h_1t+b_0)]e^{\lambda_1 t}$,

并说明上述记号的意义以及 1° 或 2° 成立的条件。

§3 线性微分方程组初值问题解的存在唯一性

现讨论线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t), \tag{1}$$

假设 $A(t)$是 n 阶方阵值的函数，$f(t)$是 n 维向量值的函数，它们在区间 $\alpha<t<\beta$ 内是连续的。

当 $A(t)$ 不是常值矩阵时，我们一般不能用初等方法求解(1)，因此就产生关于方程组(1)的解是否存在的问题。为把该问题明确化，设给定 $t_0\in(\alpha, \beta)$ 和 n 维向量 x_0，试问是否存在 $x(t)$，它在区间 $\alpha<t<\beta$ 内是连续可微的，满足方程组(1)和条件

$$x(t_0)=x_0. \tag{2}$$

该问题称为*初值问题*，(t_0, x_0) 称为*初值*，(2)称为*初值条件*。当 $A(t)\equiv A$ 时，我们在§1已证明了满足初值条件的解存在且唯一，它是通过解的表达式证明的。对于变系数方程组(1)，我们不能求出解的表达式，但能证明下述定理。

定理 设 n 阶方阵值函数 $A(t)$ 和 n 维向量值函数 $f(t)$ 在区间 $\alpha<t<\beta$ 内是连续的，$t_0\in(\alpha, \beta)$ 和 n 维向量 x_0 是给定的，那末在区间 $\alpha<t<\beta$ 内方程组(1)存在唯一的解 $x(t)$ 满足初值条件(2)。

证 我们将采用逐次逼近法这个有用的方法来进行。该方法在第四章中还要应用，它还可用于数值计算。

第一步，证明方程组(1)初值问题的解等价于积分方程组

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}\{A(s)x(s)+f(s)\}\,ds \tag{3}$$

的解。事实上，如果 $x(t)$ 是方程组(1)的解：

$$\frac{dx(t)}{dt}\equiv A(t)x(t)+f(t),$$

从 t_0 到 t 积分上式两端得

$$x(t)-x(t_0)\equiv\int_{t_0}^{t}\{A(s)x(s)+f(s)\}\,ds.$$

再利用条件(2)就得到(3)。反之，若 $x(t)$ 是(3)的连续解，令 $t=t_0$ 就得(2)。由于 $x(t)$、$f(t)$、$A(t)$ 连续，所以(3)的右端关于 t 是连续可微的，两端对 t 求导得到 $x(t)$ 是(1)的解。

第二步，逐次定义 $x_0(t)$、$x_1(t)$、…、$x_k(t)$、…如下：

$$x_0(t)\equiv x_0,$$

显然它在 $\alpha<t<\beta$ 内是连续的，因此

$$x_1(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}\{A(s)x_0(s)+f(s)\}\,ds$$

在 $\alpha<t<\beta$ 内也是连续的，定义

$$\boldsymbol{x}_2(t)\equiv\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}_1(s)+\boldsymbol{f}(s)\}ds,$$

它在 $\alpha<t<\beta$ 内也是连续的．如果已经定义了 $\boldsymbol{x}_0(t)$、$\boldsymbol{x}_1(t)$、…、$\boldsymbol{x}_k(t)$，我们定义

$$\boldsymbol{x}_{k+1}(t)\equiv\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}_k(s)+\boldsymbol{f}(s)\}ds, \tag{4}$$

它在 $\alpha<t<\beta$ 内是连续的．

第三步，证明向量值函数序列 $\boldsymbol{x}_0(t)$、$\boldsymbol{x}_1(t)$、…、$\boldsymbol{x}_k(t)$、…在开区间 $\alpha<t<\beta$ 内内闭一致收敛．即对于任一闭子区间 $[a, b]\subset(\alpha,\beta)$，当 $k\to\infty$ 时 $\boldsymbol{x}_k(t)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛，或证明级数

$$\boldsymbol{x}_0(t)+[\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_0(t)]+\cdots+[\boldsymbol{x}_{k+1}(t)-\boldsymbol{x}_k(t)]+\cdots$$

在 $[a, b]$ 上一致收敛．为此，我们来估计 $\|\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_0(t)\|$，…，$\|\boldsymbol{x}_{k+1}(t)-\boldsymbol{x}_k(t)\|$，…．记 $M=\max\limits_{a\le t\le b}\|A(t)\|$，那末当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_0(t)\|&=\left\|\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{f}(s)\}dz\right\|\\&\leqslant M\cdot\|\boldsymbol{x}_0\|\cdot\left|\int_{t_0}^{t}ds\right|+\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{f}(s)\|ds\right|\\&\leqslant M\|\boldsymbol{x}_0\|(b-a)+\int_a^b\|\boldsymbol{f}(s)\|ds.\end{aligned}$$

记 $N=M\|\boldsymbol{x}_0\|(b-a)+\int_a^b\|\boldsymbol{f}(s)\|ds$，那末当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，

$$\|\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_0(t)\|\leqslant N. \tag{5}$$

由 $\boldsymbol{x}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{x}_2(t)$ 的定义得

$$\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{x}_1(t)\equiv\int_{t_0}^{t}A(s)\{\boldsymbol{x}_1(s)-\boldsymbol{x}_0(s)\}ds,$$

所以当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，

$$\|\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{x}_1(t)\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|A(s)\|\cdot\|\boldsymbol{x}_1(s)-\boldsymbol{x}_0(s)\|ds\right|,$$

根据(5)得，当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，

$$\|\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{x}_1(t)\|\leqslant M\left|\int_{t_0}^{t}N\,ds\right|=MN|t-t_0|. \tag{6}$$

再由(6)和等式

$$\boldsymbol{x}_3(t)-\boldsymbol{x}_2(t)\equiv\int_{t_0}^{t}A(s)\{\boldsymbol{x}_2(s)-\boldsymbol{x}_1(s)\}ds$$

得到当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，

$$\|\boldsymbol{x}_3(t)-\boldsymbol{x}_2(t)\|\leqslant M^2N\left|\int_{t_0}^{t}|s-t_0|ds\right|=\frac{M^2N}{2!}(t-t_0)^2.$$

如果已经证明了，当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，

$$\|\boldsymbol{x}_k(t)-\boldsymbol{x}_{k-1}(t)\|\leqslant\frac{M^{k-1}N}{(k-1)!}|t-t_0|^{k-1},\tag{7}$$

那末由等式 $\boldsymbol{x}_{k+1}(t)-\boldsymbol{x}_k(t)\equiv\int_{t_0}^{t}A(s)\{\boldsymbol{x}_k(s)-\boldsymbol{x}_{k-1}(s)\}ds$

得到，当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_{k+1}(t)-\boldsymbol{x}_k(t)\|&\leqslant M\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{x}_k(s)-\boldsymbol{x}_{k-1}(s)\|ds\right|\\&\leqslant\frac{M^kN}{(k-1)!}\left|\int_{t_0}^{t}|s-t_0|^{k-1}ds\right|,\end{aligned}$$

所以当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，

$$\|\boldsymbol{x}_{k+1}(t)-\boldsymbol{x}_k(t)\|\leqslant\frac{M^kN}{k!}|t-t_0|^k.$$

因此，不等式(7)对于 $k=1, 2, \cdots$ 都成立。从而对任何自然数 m 和 $t\in[a, b]$，成立着不等式

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}\|\boldsymbol{x}_k(t)-\boldsymbol{x}_{k-1}(t)\|&\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{M^{k-1}N|t-t_0|^{k-1}}{(k-1)!}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{M^{k-1}N(b-a)^{k-1}}{(k-1)!}\\&\leqslant Ne^{M(b-a)}.\end{aligned}$$

因此级数

$$\boldsymbol{x}_0(t)+\{\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_0(t)\}+\cdots+\{\boldsymbol{x}_k(t)-\boldsymbol{x}_{k-1}(t)\}+\cdots\tag{8}$$

在闭区间 $[a, b]$ 上是一致收敛的。由于 $[a, b]\subset(\alpha, \beta)$ 是任意的，所以级数(8)在 (α, β) 内内闭一致收敛。记它的和为 $\boldsymbol{x}(t)$，那末 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 (α, β) 内是连续的。

第四步，由于当 $k\to\infty$ 时 $\boldsymbol{x}_k(t)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $\boldsymbol{x}(t)$，所以在(4)的两端取极限得

$$\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{x}_0+\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}_k(s)+\boldsymbol{f}(s)\}ds.$$

根据一致收敛性，上式右端的极限可移到积分号内部，从而得到

$$\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{f}(s)\}ds \tag{9}$$

在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上成立．由于$[a,\ b]\subset(\alpha,\ \beta)$的任意性，得到(9)对于 $\alpha<t<\beta$ 内的 t 成立．这就是说，积分方程组(3)存在解 $\boldsymbol{x}(t)$ 在区间 $\alpha<t<\beta$ 内连续．从而得证微分方程组(1)的初值问题的解是存在的．

第五步，证明解的唯一性．设 $\boldsymbol{x}(t)$和 $\boldsymbol{x}^*(t)$在区间 $\alpha<t<\beta$ 内是方程组(1)的解，满足初值条件(2)，即

$$\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{f}(s)\}ds,$$

$$\boldsymbol{x}^*(t)\equiv\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}^*(s)+\boldsymbol{f}(s)\}ds.$$

两式相减得 $\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)\equiv\int_{t_0}^{t}A(s)\{\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{x}^*(s)\}ds.$

因此，当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)\|\leqslant M\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{x}^*(s)\|ds\right|. \tag{10}$$

设 $N=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)\|$，代入上式右端得

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)\|\leqslant MN\left|\int_{t_0}^{t}ds\right|=MN|t-t_0|,$$

把它代入(10)的右端得

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)\|\leqslant M^2N\left|\int_{t_0}^{t}(s-t_0)ds\right|=\frac{M^2N}{2!}(t-t_0)^2.$$

逐次进行可得，当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)\|\leqslant N\frac{M^k|t-t_0|^k}{k!}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots).$$

令 $k\to+\infty$，上式右端趋于0，所以

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)\|=0,$$

即 $\boldsymbol{x}^*(t)\equiv\boldsymbol{x}(t)$在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上成立．但$[a,\ b]\subset(\alpha,\ \beta)$是任意的，

所以得证解的唯一性.

习 题

1. 试证明本节定理中的 $x_k(t)$ 和解 $x(t)$ 的差满足不等式

$$\|x_k(t)-x(t)\|\leqslant N\frac{[M(b-a)]^k}{k!}e^{M(b-a)},\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

2. 设 $f(t)$ 在 $t\geqslant 0$ 上连续, $K(t, s)$ 在 $0\leqslant s\leqslant t$ 上连续, 试用逐次逼近法证明 Volterra 积分方程

$$x(t)=f(t)+\int_0^t K(t, s)x(s)ds$$

的解在 $t\geqslant 0$ 上存在且唯一.

3. 设 $f(t, x)$ 在 $\alpha<t<\beta$, $-\infty<x<+\infty$ 中连续, 并且存在常数 N, 使得不等式

$$\left|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right|\leqslant N$$

在 $\alpha<t<\beta$, $-\infty<x<+\infty$ 内成立, 试证明非线性常微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x)$$

满足初值条件

$$x(t_0)=x_0$$

的解在 $\alpha<t<\beta$ 内存在且唯一, 这里 $t_0\in(\alpha, \beta)$ 和 x_0 是给定的.

4. 设 $p(t)$、$q(t)$ 和 $f(t)$ 在开区间 $\alpha<t<\beta$ 内是连续的. 试证明: 初值问题

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=f(t),$$

$$x(t_0)=x_0,\ \dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$$

的解在 $\alpha<t<\beta$ 内存在且唯一.

5. 试问本节定理证明中取 $[a, b]\subset(\alpha, \beta)$ 的手续可否省去? 说明原因.

6. 设 n 阶方阵 $A(t)$ 在 $\alpha<t<\beta$ 内连续, 并且成立着等式

$$A(t)\int_{t_0}^t A(s)\,ds=\int_{t_0}^t A(s)dsA(t),$$

试证

$$x=\exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right)x_0$$

是齐次微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x$$

的解.

7. 用两种方法证明: 如果 $x=\varphi(t)$ 是微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x$$

的解, 满足 $\varphi(t_0)=0$, 那末当 $\alpha<t<\beta$ 时 $\varphi(t)\equiv 0$, 这里 $A(t)$ 在 (α,β) 内连续, $t_0\in(\alpha,\beta)$ $\left[\text{提示: 考察 } \frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|^2\right]$.

§4 线性微分方程组解的结构

本节讨论齐次线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x \tag{1}$$

和非齐次线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t) \tag{2}$$

的解的结构. 我们假设 $A(t)$ 和 $f(t)$ 在开区间 $\alpha<t<\beta$ 内是连续的.

一、简单性质

1. 显然 $x=0$ 是方程组(1)的平凡解.

如果 $x=\varphi(t)$ 是方程组(1)的解, 并且存在 $t_0\in(\alpha,\beta)$ 使得

$$\varphi(t_0)=0,$$

那末在开区间 $\alpha<t<\beta$ 内成立着恒等式

$$\varphi(t)\equiv 0.$$

这容易从唯一性定理得到.

2. 迭加原理 如果 $x=\varphi_1(t)$ 和 $x=\varphi_2(t)$ 都是方程组(1)的解, 那末

$$x=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$$

也是方程组(1)的解, 其中 c_1 和 c_2 是两个任意常数.

它容易根据导微公式, 代入方程组(1)得到.

由这个性质推知, 齐次线性微分方程组解的全体构成一个线性空间. 下面将证明它是 n 维的.

根据初值问题解的存在性和唯一性定理，对于任一 n 维向量 $\boldsymbol{x}_0$，存在齐次方程组(1)的唯一的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$，满足

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{x}_0.$$

这样，齐次方程组(1)的解全体与 n 维空间建立了一一对应，并且保持线性关系．这就是说，齐次微分方程组解全体所构成的线性空间是 n 维的．

3．如果 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}(t)$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}_0(t)$ 都是非齐次微分方程组(2)的解，那末

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}(t)-\boldsymbol{\psi}_0(t)$$

是齐次微分方程组(1)的解．

事实上，由

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt}\equiv A(t)\boldsymbol{\psi}(t)+\boldsymbol{f}(t)$$

和
$$\frac{d\boldsymbol{\psi}_0(t)}{dt}\equiv A(t)\boldsymbol{\psi}_0(t)+\boldsymbol{f}(t)$$

相减就得
$$\frac{d}{dt}\{\boldsymbol{\psi}(t)-\boldsymbol{\psi}_0(t)\}\equiv A(t)\{\boldsymbol{\psi}(t)-\boldsymbol{\psi}_0(t)\}.$$

反之，如果 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是齐次方程组(1)的解，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}_0(t)$ 是非齐次方程组(2)的解，那末

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}_0(t)$$

是非齐次微分方程组(2)的解．

二、基本解组

假设 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\ \boldsymbol{\varphi}_2(t),\ \cdots,\ \boldsymbol{\varphi}_r(t)$ 是在开区间 $\alpha<t<\beta$ 内连续的向量值函数，如果存在 r 个常数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_r$，它们不同时为零，使得

$$c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(t)+\cdots+c_r\boldsymbol{\varphi}_r(t)\equiv\boldsymbol{0},\tag{3}$$

就称 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\ \boldsymbol{\varphi}_2(t),\ \cdots,\ \boldsymbol{\varphi}_r(t)$ 在开区间 $\alpha<t<\beta$ 内是线性相关的．

如果由(3)在开区间 $\alpha<t<\beta$ 内成立，能推出 $c_1=c_2=\cdots=c_r=0$，就称 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\ \boldsymbol{\varphi}_2(t),\ \cdots,\ \boldsymbol{\varphi}_r(t)$ 是线性无关的．

如果齐次微分方程组(1)的 n 个解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}_1(t),\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}_2(t),\ \cdots,\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}_n(t)$$

在开区间 $\alpha<t<\beta$ 内是线性无关的，就称这 n 个解 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\ \boldsymbol{\varphi}_2(t),$

$\cdots$, $\varphi_n(t)$是方程组(1)的基本解组.

定理1　1°　齐次微分方程组(1)存在基本解组;

2°　如果$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\cdots$, $\varphi_n(t)$是(1)的基本解组, 那末方程组(1)的任一解可表示为

$$x=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t),$$

其中c_1、c_2、$\cdots$、c_n是n个常数.

该定理表明, 齐次线性微分方程解所形成的线性空间是n维的.

证　任取$t_0\in(\alpha, \beta)$, 根据§3的定理, 对于

$$e_j=(0\cdots\overset{j}{1}\cdots0)^T,$$

存在$x=\varphi_j(t)$是方程组(1)的解, 满足条件

$$\varphi_j(t_0)=e_j\quad(j=1, 2, \cdots, n).$$

现在证明$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\cdots$, $\varphi_n(t)$是线性无关的. 事实上, 如果

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)\equiv\mathbf{0},$$

那末当$t=t_0$时得到

$$c_1\varphi_1(t_0)+c_2\varphi_2(t_0)+\cdots+c_n\varphi_n(t_0)=\mathbf{0},$$

从而

$$(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T=\mathbf{0},$$

即$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$. 因此, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\cdots$, $\varphi_n(t)$是方程组(1)的基本解组. 这就证明了1°.

再来证明2°. 假设$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\cdots$, $\varphi_n(t)$是方程组(1)的基本解组, 那末当$t=t_0$时, n维向量

$$\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \cdots, \varphi_n(t_0) \tag{4}$$

是线性无关的. 事实上, 如果它们是线性相关的, 即存在不同时为0的常数c_1, c_2, $\cdots$, c_n, 使得

$$c_1\varphi_1(t_0)+c_2\varphi_2(t_0)+\cdots+c_n\varphi_n(t_0)=\mathbf{0},$$

那末由于$x=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)$是方程组(1)的解, 且具零初始值, 所以$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)\equiv\mathbf{0}$. 它与基本解组的性质矛盾. 因此, (4)是$n$维向量空间的基.

又设 $x=\varphi(t)$是齐次方程组(1)的解，n 维向量 $\varphi(t_0)$可以用 $\varphi_1(t_0)$, $\varphi_2(t_0)$, $\cdots$, $\varphi_n(t_0)$线性表示，即存在 n 个常数 c_1, c_2, $\cdots$, c_n,使得

$$\varphi(t_0)=c_1\varphi_1(t_0)+c_2\varphi_2(t_0)+\cdots+c_n\varphi_n(t_0).$$

再根据唯一性得到

$$\varphi(t)\equiv c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t).$$

它就是 2°.

定理 2 设 $\psi_0(t)$是非齐次方程组(2)的一个解，$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\cdots$, $\varphi_n(t)$是齐次方程组(1)的基本解组，那末非齐次方程组(2)的解 $\psi(t)$可表示成

$$x=\psi(t)\equiv c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)+\psi_0(t), \tag{5}$$

其中 c_1, c_2, $\cdots$, c_n 是 n 个常数.

证 根据本节第一段的性质 3, $x=\psi(t)-\psi_0(t)$是齐次方程组(1)的解，再根据定理 1, 存在 c_1, c_2, $\cdots$, c_n 满足

$$\psi(t)-\psi_0(t)\equiv c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t).$$

因此定理证毕.

定理 1 和 2 给出了方程组(1)和(2)解的基本结构.

三、刘维尔公式

假设 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\cdots$, $\varphi_n(t)$是齐次方程组(1)的 n 个解(不一定是基本解组)，而

$$\varphi_k(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{1k}(t)\\ \varphi_{2k}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{nk}(t)\end{pmatrix}(k=1, 2, \cdots, n),$$

我们称方阵

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

为齐次微分方程组(1)的解方阵；称矩阵 $\Phi(t)$的行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}$$

为解组 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$, $\cdots$, $\boldsymbol{\varphi}_n(t)$的朗斯基(Wronsky)行列式.

当 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$, $\cdots$, $\boldsymbol{\varphi}_n(t)$为基本解组时，称方阵 $\Phi(t)$ 是齐次微分方程组的基本解方阵. 这时，齐次方程组(1)的通解可写为

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n(t)=\Phi(t)\boldsymbol{c},$$

这里 $\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$ 是任意的 n 维常向量. 而非齐次方程组(2)的通解可以写成

$$\boldsymbol{x}=\Phi(t)\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\psi}_0(t),$$

这里 $\boldsymbol{\psi}_0(t)$是方程组(2)的一个解.

虽然很难求出微分方程组(1)的解 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$, $\cdots$, $\boldsymbol{\varphi}_n(t)$, 却很容易求出它的朗斯基行列式. 事实上，成立着如下的刘维尔公式：

$$W(t)=W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{n}a_{kk}(s)\,ds\right). \tag{6}$$

为证明公式(6)，先计算导数$\dfrac{dW(t)}{dt}$. 根据行列式的定义以及和、积的导微公式，可以证明

$$\frac{dW(t)}{dt}=\begin{vmatrix}\dot\varphi_{11}(t) & \dot\varphi_{12}(t) & \cdots & \dot\varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \dot\varphi_{21}(t) & \dot\varphi_{22}(t) & \cdots & \dot\varphi_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}$$
$$+\cdots+\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dot\varphi_{n1}(t) & \dot\varphi_{n2}(t) & \cdots & \dot\varphi_{nn}(t)\end{vmatrix} \tag{7}$$

但是

$$\begin{vmatrix} \dot{\varphi}_{11}(t) & \dot{\varphi}_{12}(t) & \cdots & \dot{\varphi}_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\varphi_{k1}(t) & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\varphi_{k2}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\varphi_{kn}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(t)W(t).$$

运用同样的方法计算(7)右端的其它行列式. 因此，由(7)得

$$\frac{dW(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)W(t) = \mathrm{tr}A(t)W,$$

由此得到公式(6). 这里 $\mathrm{tr}A(t)$是矩阵 $A(t)$的迹.

定理 3 设 $\Phi(t)=(\boldsymbol{\varphi}_1(t)\boldsymbol{\varphi}_2(t)\cdots\boldsymbol{\varphi}_n(t))$是方程组(1)的解方阵，$W(t)\equiv\det\Phi(t)$是它的朗斯基行列式，那末 $\Phi(t)$为(1)的基本解方阵的充要条件是 $W(t)\neq 0$.

证 如果存在 $t_0\in(\alpha,\beta)$使得 $W(t_0)=0$，那末存在 n 个常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，它们不同时为 0，且

$$c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n(t_0)=\mathbf{0},$$

根据初值问题解的唯一性推得

$$c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n(t)\equiv\mathbf{0}$$

在区间(α,β)内成立，从而 $\Phi(t)$不是基本解方阵. 因此，如果 $\Phi(t)$是基本解方阵，那末 $W(t)\neq 0$.

反之，如果 $\Phi(t)$不是基本解方阵，即存在 n 个常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，它们不同时为 0，且成立着恒等式

$$c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n(t)\equiv\mathbf{0},$$

因此 $W(t)\equiv 0$. 定理证毕.

由刘维尔公式(6)或上述定理得到，方程组(1)的解组的朗斯

基行列式或者恒等于 0，或者恒不为 0.

四、一个例题

在 § 2我们证明了下述事实：如果方阵 A 的特征值的实部都小于 0，那末常系数线性微分方程组 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 的每一解 $x(t)$ 具有性质 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\mathbf{0}$.

在研究了变系数方程组(1)的解的结构之后，自然企图讨论系数矩阵 $A(t)$ 对方程组(1)的解的性质的影响．在工程上有这样一个设想，即所谓"冻结系数法"：设 $A(t)$ 在区间 $0\leqslant t<+\infty$ 中是连续的，并且当 t 固定时矩阵 $A(t)$ 的特征值 $\lambda(t)$ 的实部都小于 0，那末变系数线性方程组(1)的解 $x(t)$ 具有性质

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=\mathbf{0}. \tag{8}$$

应当指出，这种设想在数学上是缺乏根据的，而且结论是否定的，即存在 $A(t)$，它的特征值都是负的，但微分方程组(1)的解不具有性质(8)．本书第二版第 181 页的习题 3 曾引用维诺格拉德(Виноград)1952 年的结果说明这个问题．现详述如下．

设　$A(t)\equiv$

$$\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}-\frac{9}{2}\cos 12t+6\sin 12t & 6+6\cos 12t+\frac{9}{2}\sin 12t\\ -6+6\cos 12t+\frac{9}{2}\sin 12t & -\frac{11}{2}+\frac{9}{2}\cos 12t-6\sin 12t\end{pmatrix},$$

那末方阵 $A(t)$ 的行列式

$$\det A(t)\equiv\left(\frac{11}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{2}\cos 12t-6\sin 12t\right)^2$$
$$+6^2-\left(6\cos 12t+\frac{9}{2}\sin 12t\right)^2\equiv 10,$$

而方阵 $A(t)$ 的迹

$$\operatorname{tr}(t)\equiv-11,$$

所以 $A(t)$ 的特征方程为

$$\lambda^2+11\lambda+10=(\lambda+1)(\lambda+10)=0,$$

即两个特征值为 -1 和 -10.

但容易验证

$$\begin{aligned} x&=e^{2t}(\cos 6t+2\sin 6t),\\ y&=e^{2t}(-\sin 6t+2\cos 6t), \end{aligned} \tag{9}$$

是微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=\left(-\frac{11}{2}-\frac{9}{2}\cos 12t+6\sin 12t\right)x\\ &\quad+\left(6+6\cos 12t+\frac{9}{2}\sin 12t\right)y,\\ \frac{dy}{dt}&=\left(-6+6\cos 12t+\frac{9}{2}\sin 12t\right)x\\ &\quad+\left(-\frac{11}{2}+\frac{9}{2}\cos 12t-6\sin 12t\right)y \end{aligned}$$

的解.

显然解(9)不具有性质(8). 该例题表明,"冻结系数法"一般是不正确的. 但是,工程上又常用该方法来研究变系数微分方程组解的性质,这就产生了研究"冻结系数法"适用的条件的问题.

五、常数变易公式

现在介绍非齐次线性方程组(2)解的常数变易公式.

我们已知 $\boldsymbol{x}=\Phi(t)\boldsymbol{c}$ 是齐次方程组(1)的解,当 $\Phi(t)$ 是(1)的基本解方阵时,它是(1)的通解. 现在试把 $\boldsymbol{c}$ 换为 t 的函数 $\boldsymbol{c}(t)$,使得

$$\boldsymbol{x}=\Phi(t)\boldsymbol{c}(t) \tag{10}$$

是非齐次方程组(2)的解,这种方法称为常数变易法. 由于

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}&=\frac{d\Phi(t)}{dt}\boldsymbol{c}(t)+\Phi(t)\frac{d\boldsymbol{c}(t)}{dt}\\ &=A(t)\Phi(t)\boldsymbol{c}(t)+\Phi(t)\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}, \end{aligned}$$

如果(10)是(2)的解,那末

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t)=A(t)\Phi(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{f}(t),$$

所以
$$\Phi(t)\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}=\boldsymbol{f}(t).$$
但 $\Phi(t)$ 是(1)的基本解方阵，所以 $\Phi(t)$ 的逆 $\Phi^{-1}(t)$ 存在，从而
$$\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}=\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t),$$
因此
$$\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{c}_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds,$$
这里 $\boldsymbol{c}_0$ 是任意的常向量. 从而
$$\boldsymbol{x}=\Phi(t)\boldsymbol{c}_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \tag{11}$$
是非齐次方程组(2)的解，而称公式(11)为常数变易公式. 公式(11)在控制理论及其它数学分支中有重要的应用. 若记
$$U(t,s)=\Phi(t)\Phi^{-1}(s),$$
那末 $U(t,s)$ 具有以下性质：

1° $U(s,s)=I$；

2° $U(t,s)U(s,\tau)=U(t,\tau)\quad(t,s,\tau\in(\alpha,\beta))$；

3° $U^{-1}(t,s)=U(s,t)$；

4° $\dfrac{dU(t,s)}{dt}=A(t)U(t,s)$.

我们称具有上述性质的 $U(t,s)$ 为方程组(1)的转移矩阵. 这时，公式(11)可改写为
$$\boldsymbol{x}=U(t,t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}U(t,s)\boldsymbol{f}(s)ds, \tag{12}$$
其中
$$\boldsymbol{x}_0=\Phi(t_0)\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{x}(t_0).$$

[例 1] 求解微分方程组
$$\frac{dx}{dt}=x+2y-e^{-t},$$
$$\frac{dy}{dt}=4x+3y+4e^{-t}.$$

解 相应的齐次线性微分方程组是
$$\frac{dx}{dt}=x+2y,$$

$$\frac{dy}{dt}=4x+3y.$$

它的特征方程是

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5=(\lambda-5)(\lambda+1)=0.$$

容易证明：齐次方程组的通解是

$$x=c_1e^{5t}+c_2e^{-t},$$
$$y=2c_1e^{5t}-c_2e^{-t},$$

其中 c_1 和 c_2 是两个任意常数.

1° 现用常数变易法求例中方程的解，设

$$x=c_1(t)e^{5t}+c_2(t)e^{-t},$$
$$y=2c_1(t)e^{5t}-c_2(t)e^{-t}$$

是它的解，那末

$$\begin{aligned}e^{5t}\frac{dc_1}{dt}+e^{-t}\frac{dc_2}{dt}&=-e^{-t},\\ 2e^{5t}\frac{dc_1}{dt}-e^{-t}\frac{dc_2}{dt}&=4e^{-t}.\end{aligned}\tag{13}$$

两式相加，得到

$$\frac{dc_1}{dt}=e^{-6t},$$

所以
$$c_1(t)=c_1-\frac{1}{6}e^{-6t}.$$

(13)第一式乘以 2 减去第二式，得到

$$\frac{dc_2(t)}{dt}=-2,$$

所以
$$c_2(t)=c_2-2t.$$

从而原方程的任一解可以表示成为

$$x=c_1e^{5t}+c_2e^{-t}-\left(2t+\frac{1}{6}\right)e^{-t},$$

$$y=2c_1e^{5t}-c_2e^{-t}+\left(2t-\frac{1}{3}\right)e^{-t}.$$

2°　由于该例题的非齐次项是指数函数，我们很自然设想把第二章§3的方法移过来．试求方程组形如下式的解：

$$x=Ae^{-t},\ y=Be^{-t}. \tag{14}$$

代入方程，得到

$$-A=A+2B-1,$$
$$-B=4A+3B+4,$$

即

$$2A+2B=1,$$
$$4A+4B=-4.$$

这是不可能的，即形如(14)的解是不存在的．

进而设想它有如下形状的解：

$$x=(At+B)e^{-t},\ y=(Ct+D)e^{-t}.$$

代入方程，得到

$$(-At-B+A)e^{-t}=[(A+2C)t+B+2D]e^{-t}-e^{-t},$$
$$(-Ct-D+C)e^{-t}=[(4A+3C)t+4B+3D]e^{-t}+4e^{-t}.$$

从而

$$-A=A+2C,\ A-B=B+2D-1,$$
$$-C=4A+3A,\ C-D=4B+3D+4.$$

即

$$A+C=0,$$
$$A-2B-2D=-1,$$
$$-4B+C-4D=4.$$

由后两式得到

$$2A-C=-6.$$

从而

$$A=-2,\ C=2,$$
$$-2B-2D=1.$$

如果取 $D=-\frac{1}{3}$，则 $B=-\frac{1}{6}$．所以

$$x=-\left(2t+\frac{1}{6}\right)e^{-t},\ \ y=\left(2t-\frac{1}{3}\right)e^{-t}$$

是原方程的一个解．

习 题

1. 设 n 阶方阵值函数 $X(t)$ 满足矩阵微分方程

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X,$$

求证 $X(t)$ 是微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x$$

的解方阵.

2. 设 $\Phi(t)$ 是方程组(1)的基本解方阵, 试证 $X(t)$ 为(1)的解方阵的充要条件是存在 n 阶常值阵 C, 使得

$$X(t)\equiv\Phi(t)C.$$

并给出 $X(t)$ 为基本解方阵的条件.

3. 设 $U(t, s)$ 是方程组(1)的转移矩阵, 试证

1) $\dfrac{dU(t, s)}{ds}\equiv-U(t, s)A(s)$;

2) $U(t, s)\equiv I+\displaystyle\int_s^t A(\tau)U(\tau, s)d\tau$;

3) $U(t, s)\equiv I+\displaystyle\int_s^t U(t, \tau)A(\tau)d\tau$,

这里 $t, s\in(\alpha, \beta)$.

4. 试证常系数线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=Ax$$

的转移矩阵 $U(t, s)\equiv\exp(A(t-s))$.

5. 设 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 分别是方程组

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x$$

和它的共轭方程组

$$\frac{dx}{dt}=-A^*(t)x$$

的解, 这里 $A^*(t)$ 是 $A(t)$ 的转置共轭矩阵, 试证 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的内积 $(\varphi(t), \psi(t))$ 不依赖于 t, 即

$$(\varphi(t), \psi(t))\equiv(\varphi(t_0), \psi(t_0)).$$

6. 求解方程组:

1) $\dfrac{dx_1}{dt}=x_1\cos t+x_2\sin t$,

$\frac{dx_2}{dt}=x_1\sin t+x_2\cos t$;

2) $\frac{dx_1}{dt}=x_1\cos^2 t+x_2\sin^2 t$,

$\frac{dx_2}{dt}=x_1\sin^2 t+x_2\cos^2 t$;

3) $\frac{dx_1}{dt}=-x_1(1+\sin^2 t)-x_2\cos^2 t$,

$\frac{dx_2}{dt}=-x_1\cos^2 t-x_2(1+\sin^2 t)$;

4) $\frac{dx_1}{dt}=-(1+\sin t)x_1$,

$\frac{dx_2}{dt}=x_1-(1+\sin t)x_2$;

5) $\frac{dx_1}{dt}=-2x_1\cos^2 t-x_2(1+\sin 2t)$,

$\frac{dx_2}{dt}=x_1(1-\sin 2t)-2x_2\sin^2 t$.

[提示：先验证 $x_1=-\sin t$, $x_2=\cos t$ 是它的一个解.]

7. 求解下列方程(或方程组)：

1) $\frac{dx}{dt}=y+\operatorname{tg}^2 t+1$, $\frac{dy}{dt}=-x+\operatorname{tg} t$;

2) $\frac{dx}{dt}=-x+2y$, $\frac{dy}{dt}=4y-3x+\frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}$;

3) $\frac{dx}{dt}=-4x-2y+\frac{2}{e^t-1}$, $\frac{dy}{dt}=6x+3y-\frac{3}{e^t-1}$;

4) $\frac{dx}{dt}=x-y+\frac{1}{\cos t}$, $\frac{dy}{dt}=2x-y$;

5) $\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t$, $\frac{dy}{dt}-x+3y=e^{2t}$;

6) $\frac{dx}{dt}=y$, $\frac{dy}{dt}=x+e^t+e^{-t}$;

7) $\frac{dx}{dt}+x+y=t^2$, $\frac{dy}{dt}+y+z=2t$, $\frac{dz}{dt}+z=t$;

8) $t\frac{dx}{dt}-x-3y=t$, $t\frac{dy}{dx}-x+y=0$;

9) $t^2\frac{d^2x}{dt^2}-t\frac{dx}{dt}+2x=t\ln t$;

10) $\frac{d^2x}{dt^2}-x=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$.

8. 设方阵值函数 $A(t)$ 是周期为 ω 的连续函数，$\Phi(t)$ 是微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x$$

的基本解方阵，试证方程组的每一解是周期为 ω 的连续函数的充要条件为

$$\Phi(\omega)=\Phi(0).$$

*9. 设方阵值函数 $X(t)$ 在 $-\infty<t<+\infty$ 中是连续的，并且存在 t_0 使得 $\det X(t_0)\neq 0$，如果关系式

$$X(t)X(s)=X(t+s)$$

对任何 $t,\ s\in(-\infty,\ +\infty)$ 成立，试证存在方阵 A 使得

$$X(t)\equiv e^{At}.$$

10. 设 $A(t)=\begin{pmatrix}2t & 1\\ 0 & 4t\end{pmatrix}$，试说明 $x=\exp\left(\int_{t_0}^{t}A(s)ds\right)x_0$ 不是微分方程 $\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$ 的解。

§5 二阶变系数线性微分方程

现讨论二阶变系数线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=f(t) \tag{1}$$

和

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=0, \tag{2}$$

其中 $p(t)$，$q(t)$ 和 $f(t)$ 是区间 $\alpha<t<\beta$ 内的连续函数。

置 $y=\dfrac{dx}{dt}$，那末(1)等价于一阶线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,$$

$$\frac{dy}{dt}=-q(t)x-p(t)y+f(t),$$

或

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ f(t)\end{pmatrix}. \tag{3}$$

因此，§3 和 §4 关于线性微分方程组的结果可用于(1)，即有下述定理。

定理 1　二阶线性微分方程(1)满足初值条件

$$x(t_0)=x_0,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}=\dot{x}_0$$

的解在区间 $\alpha<t<\beta$ 内存在且唯一，这里 $t_0\in(\alpha,\beta)$，x_0 和 $\dot{x}_0$ 是任意给定的.

定理 2　二阶线性微分方程(2)存在两个在区间 $\alpha<t<\beta$ 内线性无关的解 $x=\varphi_1(t)$ 和 $x=\varphi_2(t)$，并且(2)的通解是

$$x=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t),$$

其中 c_1 和 c_2 是两个任意常数．如果 $\varphi_0(t)$ 是(1)的一个解，那末(1)的通解是

$$x=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\varphi_0(t),$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数.

它们的证明留给读者.

设二阶方阵函数 $U(t,s)$ 是(3)的转移矩阵，那末

$$U(t,s)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t,s) & \varphi_2(t,s)\\ \dot{\varphi}_1(t,s) & \dot{\varphi}_2(t,s)\end{pmatrix},$$

其中 $\varphi_1(t,s)$ 和 $\varphi_2(t,s)$ 都是齐次微分方程(2)的解，并且满足条件

$$\varphi_1(s,s)=1,\ \left.\frac{\partial\varphi_1(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s}=0$$

和

$$\varphi_2(s,s)=0,\ \left.\frac{\partial\varphi_2(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s}=1.$$

这时，方程组(3)的解可表示成

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_1(t,t_0) & \varphi_2(t,t_0)\\ \dfrac{\partial\varphi_1(t,t_0)}{\partial t} & \dfrac{\partial\varphi_2(t,t_0)}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ \dot{x}_0\end{pmatrix}+\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}\varphi_1(t,s) & \varphi_2(t,s)\\ \dfrac{\partial\varphi_1(t,s)}{\partial t} & \dfrac{\partial\varphi_2(t,s)}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ f(s)\end{pmatrix}ds.$$

因此，得证微分方程(1)的解是

$$x=\varphi_1(t,t_0)x_0+\varphi_2(t,t_0)\dot{x}_0+\int_{t_0}^{t}\varphi_2(t,s)f(s)ds,\tag{4}$$

即有

定理3 如果 $k(t, s)$ 作为 t 的函数是齐次方程(2)的解，满足条件

$$k(s, s)=0, \quad \left.\frac{\partial k(t, s)}{\partial t}\right|_{t=s}=1,$$

那末当 $t_0\in(\alpha, \beta)$ 时，函数

$$x=\int_{t_0}^{t} k(t, s)f(s)ds$$

在区间 $\alpha<t<\beta$ 内是方程(1)的解，满足条件

$$x(t_0)=\dot{x}(t_0)=0.$$

特别，当 $p(t)\equiv p$，$q(t)\equiv q$ 时，如果 $k(t)$ 是二阶常系数线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{dx}{dt}+qx=0 \tag{5}$$

的解，适合条件

$$k(0)=0, \quad \left.\frac{dk(t)}{dt}\right|_{t=0}=1,$$

那末 $x=k(t-s)$ 也是(5)的解，且满足条件

$$k(t-s)\big|_{t=s}=0, \quad \dot{k}(t-s)\big|_{t=s}=1.$$

从而
$$x=\int_0^t k(t-s)f(t)ds$$

是二阶常系数微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{dx}{dt}+qx=f(t)$$

的解. 我们在第二章中曾得到这个结果.

[例1] 试求解二阶微分方程

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}-2x=t. \tag{6}$$

解 容易验证，当 $t>0$ 时，

$$x=t^2 \quad 和 \quad x=\frac{1}{t}$$

都是齐次方程

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}-2x=0 \tag{7}$$

的解，并且它们是线性无关的，从而

$$x=c_1t^2+\frac{c_2}{t}$$

是(7)的通解。现求 $k(t, s)$，即要求

$$x(s)=c_1s^2+\frac{c_2}{s}=0,$$

$$\dot{x}(s)=2c_1s-\frac{c_2}{s^2}=1.$$

所以 $$c_1=\frac{1}{3s},\quad c_2=-\frac{s^2}{3}.$$

因此 $$k(t, s)=\frac{t^2}{3s}-\frac{s^2}{3t},$$

所以方程(6)的通解是

$$\begin{aligned}x&=c_1t^2+\frac{c_2}{t}+\int_1^t\left(\frac{t^2}{3s}-\frac{s^2}{3t}\right)\frac{1}{s}ds\\&=\left(c_1+\frac{1}{3}\right)t^2+\left(c_2+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{t}-\frac{t}{2}.\end{aligned}$$

由上所述，为了求解二阶线性微分方程(1)，应求出齐次线性微分方程(2)的两个线性无关的解．可是实际上要求出(2)的一个非零解是十分困难的，不要说求出它的两个线性无关解了．

但是，如果已知 $x=\varphi_1(t)$ 是齐次方程(2)的一个非零解，我们就可以求出它的全部解，方法如下．

设 $\varphi_1(t)\neq0$，且

$$\frac{d^2\varphi_1(t)}{dt^2}+p(t)\frac{d\varphi_1(t)}{dt}+q(t)\varphi_1(t)\equiv0,$$

用 $\varphi_1(t)$ 乘(2)减去上式乘以 x，得

$$\frac{d^2x}{dt^2}\varphi_1(t)-x\frac{d^2\varphi_1(t)}{dt^2}+p(t)\left(\frac{dx}{dt}\varphi_1(t)-x\frac{d\varphi_1(t)}{dt}\right)=0,$$

即 $$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\frac{dx}{dt}\varphi_1(t)-x\frac{d\varphi_1(t)}{dt}\right\}\\&\quad+p(t)\left\{\frac{dx}{dt}\varphi_1(t)-x\frac{d\varphi_1(t)}{dt}\right\}=0.\end{aligned}$$

根据一阶线性微分方程的求解公式得

$$\frac{dx}{dt}\varphi_1(t)-x\frac{d\varphi_1(t)}{dt}=c\exp\left(-\int p(t)\,dt\right),\tag{8}$$

其中 c 是任意常数.

如果 $\varphi_1(t)\neq 0$, 那末

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{\varphi_1(t)}\right)=c\exp\left(-\int p(t)dt\right)\Big/\varphi_1^2(t),$$

所以

$$x=\varphi_1(t)\left\{c_1+c\int\frac{\exp\left(-\int p(t)dt\right)}{\varphi_1^2(t)}dt\right\},$$

其中 c_1 是另一个任意常数. 从而

$$x=\varphi_1(t)\int\frac{\exp\left(-\int p(t)dt\right)}{\varphi_1^2(t)}dt\tag{9}$$

是方程(2)的另一解，它与 $\varphi_1(t)$ 是线性无关的. 因为如果它与 $\varphi_1(t)$ 线性相关,就存在不全为0的常数 c_1 和 c_2 使得

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_1(t)\int\frac{\exp\left(-\int p(t)dt\right)}{\varphi_1^2(t)}dt\equiv 0,$$

但 $\varphi_1(t)\neq 0$, 所以

$$c_1+c_2\int\frac{\exp\left(-\int p(t)dt\right)}{\varphi_1^2(t)}dt\equiv 0.$$

两端对 t 求导得

$$c_2\frac{\exp\left(-\int p(t)dt\right)}{\varphi_1^2(t)}\equiv 0,$$

但 $\exp\left(-\int p(t)\,dt\right)\neq 0$, $\varphi_1^2(t)\neq 0$, 所以 $c_2=0$, 从而 $c_1=0$, 矛盾. 所以(9)与 $\varphi_1(t)$ 线性无关.

对于二阶齐次方程(7), 如果仅知道 $x=t^2$ 是它的解, 那末由公式(9)可得另一解

$$x=t^2\int\frac{\exp\left(-\int 0\,dt\right)}{t^4}dt=t^2\int\frac{1}{t^4}dt=-\frac{1}{3t},$$

因此，$x=\frac{1}{t}$ 是一个与 t^2 线性无关的解.

如何求出齐次微分方程(2)的一个非零解呢？这个问题有某种实质性的困难. 刘维尔证明黎卡提方程的解不能用初等函数及其有限次积分求解，也就是证明了二阶线性微分方程不能用初等方法求解. 事实上，若置

$$y=\frac{dx}{dt}\Big/x,$$

那末

$$\frac{dx}{dt}=xy,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}y+x\frac{dy}{dt}=x\left(y^2+\frac{dy}{dt}\right),$$

所以

$$x\left(\frac{dy}{dt}+y^2\right)+p(t)xy+q(t)x=0,$$

从而

$$\frac{dy}{dt}+y^2+p(t)y+q(t)=0. \tag{10}$$

因此，求解二阶变系数线性微分方程(2)的问题本质上与求解黎卡提方程(10)的问题是一致的.

下面我们再介绍求方程(2)的解的幂级数方法，它是讨论种种特殊函数的基础.

定理 4　设 $p(t)$ 和 $q(t)$ 在 $|t|<r\ (r>0)$ 内可展开为收敛的幂级数

$$p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}p_kt^k,\quad q(t)=\sum_{k=0}^{\infty}q_kt^k,$$

那末二阶线性微分方程(2)的每一解在 $|t|<r$ 内也可展开为收敛的幂级数

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k.$$

定理 5　设 $a(t)$ 和 $b(t)$ 在 $|t|<r$ 内可展开为收敛的幂级数，那末二阶线性微分方程

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+ta(t)\frac{dx}{dt}+b(t)x=0 \tag{11}$$

至少有一个形状为

$$x = t^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

的解，其中 ρ 是某一常数，幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ 在 $|t|<r$ 内是收敛的，$c_0 \neq 0$.

这两个定理是常微分方程解析理论的基本定理. 它们的证明需要幂级数的理论，本书从略.

[例 2] 求解二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} - tx = 0$.

解 由于该方程的系数 $p(t) \equiv 0$, $q(t) = -t$, 根据定理 4, 它的任一解可以展开为幂级数

$$x = C_0 + C_1 t + \cdots + C_n t^n + \cdots,$$

该级数在 $-\infty < t < +\infty$ 中收敛. 把它代入方程得

$$2\cdot 1 C_2 + 3\cdot 2 C_3 t + \cdots + (n+2)(n+1) C_{n+2} t^n + \cdots$$
$$- C_0 t - C_1 t^2 - \cdots - C_{n-1} t^n - \cdots \equiv 0,$$

比较 t 的同次幂系数得

$$2\cdot 1 C_2 = 0,$$
$$3\cdot 2 C_3 - C_0 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+2)(n+1) C_{n+2} - C_{n-1} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

所以
$$C_2 = 0,\ C_3 = \frac{1}{3\cdot 2} C_0,\ C_4 = \frac{1}{4\cdot 3} C_1,$$
$$C_5 = 0,\ C_6 = \frac{1}{6\cdot 5} C_3 = \frac{1\cdot 4}{6!} C_0,$$
$$C_7 = \frac{1}{7\cdot 6} C_4 = \frac{2\cdot 5}{7!} C_1,$$

一般地
$$C_{3k-1} = 0,$$
$$C_{3k} = \frac{1\cdot 4\cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} C_0,$$
$$C_{3k+1} = \frac{2\cdot 5\cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} C_1,$$

因此，该方程的任一解是

$$x=C_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdots(3k-2)}{(3k)!}t^{3k}\right)$$
$$+C_1\left(t+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}t^{3k+1}\right),$$

其中 C_0 和 C_1 是两个任意常数.

[例 3]　试求贝塞尔(Bessel)方程

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}+(t^2-m^2)x=0 \tag{12}$$

的一个特解，其中m是给定的常数.

解　由于该方程的形状如(11)，所以它有一个特解形状为

$$x=t^\rho(C_0+C_1t+\cdots+C_nt^n+\cdots)\quad(C_0\neq0),$$

而幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}C_kt^k$ 在 $-\infty<t<+\infty$ 内收敛，ρ 是待定的常数. 把它代入方程得

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}+(t^2-m^2)x$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\rho+n)(\rho+n-1)C_nt^{\rho+n}+\sum_{n=0}^{\infty}(\rho+n)C_nt^{\rho+n}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^{\rho+n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}m^2C_nt^{\rho+n}=0,$$

归并 t 的同次幂项得

$$(\rho^2-m^2)C_0t^\rho+[(\rho+1)^2-m^2]C_1t^{\rho+1}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{[(\rho+n)^2-m^2]C_n+C_{n-2}\}t^{\rho+n}=0.$$

由此得到确定 ρ 和系数 C_n 的关系式

$$\begin{aligned}&(\rho^2-m^2)C_0=0,\\&[(\rho+1)^2-m^2]C_1=0,\\&[(\rho+2)^2-m^2]C_2+C_0=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&[(\rho+n)^2-m^2]C_n+C_{n-2}=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\tag{13}$$

因为 $C_0\neq 0$, 所以得到常数 ρ 所满足的指示方程

$$\rho^2-m^2=0,$$

它有两个根 $\rho_1=m$, $\rho_2=-m$. 取 $\rho_1=m>0$, 那末

$$(m+n)^2-m^2\neq 0 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

从而得到

$$C_1=C_3=\cdots=C_{2k-1}=\cdots=0,$$

并且

$$[(m+2k)^2-m^2]C_{2k}+C_{2k-2}$$
$$=2^2k(m+k)C_{2k}+C_{2k-2}=0,$$

从而

$$C_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(1+m)\cdots(k+m)}C_0 \quad (k=1,\ 2,\ \cdots).$$

若取

$$C_0=\frac{1}{2^m\Gamma(1+m)},$$

那末

$$C_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{m+2k}k!\Gamma(1+m)(1+m)\cdots(k+m)}$$
$$=\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+m+1)\cdot 2^{m+2k}}.$$

所以

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{m+2k}$$

是贝塞尔方程的一个特解, 称为第一类贝塞尔函数, 通常记为 $J_m(x)$.

当 m 不是正整数或零时, 对于 $\rho_2=-m$, 仍可由(13)决定贝塞尔方程的另一特解. 当 m 是正整数或零时, 则需要利用公式(9)求另一特解.

[例 4] 试求欧拉方程

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+at\frac{dx}{dt}+bx=0 \tag{14}$$

的解, 其中 a 和 b 是两个常数.

解 由于它的形状如(11), 所以它有形状如下的特解

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^{\rho+n} \quad (C_0\neq 0)$$

把它代入(14)得

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\rho+n)(\rho+n-1)t^{\rho+n}+a\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\rho+n)t^{\rho+n}$$

$$+b\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{\rho+n}=0,$$

即
$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(\rho+n)(\rho+n-1)+a(\rho+n)+b\}C_n t^{\rho+n}=0,$$

因此

$$\begin{aligned}&\{\rho(\rho-1)+a\rho+b\}C_0=0,\\&\{(\rho+1)\rho+a(\rho+1)+b\}C_1=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\{(\rho+n)(\rho+n-1)+a(\rho+n)+b\}C_n=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\tag{15}$$

由于 $C_0\neq 0$，得到指示方程

$$\rho(\rho-1)+a\rho+b=0.\tag{16}$$

它有两个根 ρ_1 和 ρ_2，不妨设 $\mathrm{Re}\rho_1\geqslant\mathrm{Re}\rho_2$.

当 $\rho=\rho_1$，$n=1, 2, \cdots$时

$$(\rho_1+n)(\rho_1+n-1)+a(\rho_1+n)+b\neq 0,$$

所以 $C_n=0(n=1, 2, \cdots)$，从而欧拉方程具有如下形状的解

$$x=t^{\rho_1}.$$

当 $\rho=\rho_2$ 时，有可能出现 $(\rho_2+n)(\rho_2+n-1)+a(\rho_2+n)+b=0$ 的情况，但如果取 $C_n=0(n=1, 2, \cdots)$，公式(15)仍成立，即 $x=t^{\rho_2}$ 也是欧拉方程(14)的解.

如果 $\rho_1\neq\rho_2$，那末 $x=t^{\rho_1}$ 和 $x=t^{\rho_2}$ 都是(14)的解，它们是线性无关的.

如果 $\rho_1=\rho_2$，我们用 $x=t^{\rho}$ 代入方程(14)，只能求出它的一个非零解．为求另一个非零解，宜用公式(9)．但容易验证：$x=t^{\rho_1}\ln|t|$是它的另一解.

因此，对于欧拉方程(14)，只需求形状如 $x=t^{\rho}$ 的解，得到指示方程(16)，然后根据(16)的根 ρ_1 和 ρ_2 来决定它的线性无关解．我们在第二章已经用该方法求过欧拉方程的解，这里是用幂级数求解方法重新论证.

注. 公式(8)表明，对于二阶线性方程(2)的任何两个解 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$，成立着等式

$$\varphi_1(t)\frac{d\varphi_2(t)}{dt}-\frac{d\varphi_1(t)}{dt}\varphi_2(t)\equiv c\exp\left(-\int p(t)dt\right),$$

即

$$W(t)\equiv\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t)\\ \dot{\varphi}_1(t) & \dot{\varphi}_2(t)\end{vmatrix}\equiv c\exp\left(-\int p(t)dt\right).$$

由此可得二阶线性微分方程的刘维尔公式

$$W(t)\equiv W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}p(s)ds\right).$$

习　　题

1. 试证明二阶线性方程

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}-x=0$$

满足条件 $x(0)=1$ 的解不存在. 这与定理1矛盾吗？

2. 证明可用变换 $x=a(t)y$ 把二阶线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=0$$

化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+r(t)y=0,$$

并求出 $a(t)$ 和 $r(t)$.

3. 求解微分方程

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}-4t\frac{dx}{dt}+6x=t.$$

4. 求解微分方程

$$(1-t)\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}-x=-(t-1)^2.$$

5. 证明 $y=(\arcsin x)^2$ 是微分方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2$$

的解，并用幂级数方法决定 $(\arcsin x)^2$ 在 $x=0$ 附近的幂级数展开式.

6. 对于三阶线性微分方程

$$\frac{d^3x}{dt^3}+p(t)\frac{d^2x}{dt^2}+q(t)\frac{dx}{dt}+r(t)x=f(t)$$

建立相应的定理1、定理2和定理3.

*7. 设 $a(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上连续，$a(t)\leqslant 0$ 且 $a(t)\not\equiv 0$. 如果 $x(t)$ 是二阶微

分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a(t)x=0$$

的解,满足条件 $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=0$, 试证

$$x(T)>1.$$

8. 验证 $x=\frac{\sin t}{t}$ 是方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2}{t}\cdot\frac{dx}{dt}+x=0$ 的解，并求方程的全部解.

9. 验证 $x=\operatorname{ctg} t$ 是方程 $\sin^2 t\frac{d^2x}{dt^2}=2x$ 的解，并求方程的全部解.

10. 验证 $x=t$ 是方程 $t^2\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}-x=0$ 的解，并求方程的全部解.

§6　二阶线性微分方程的边值问题

到目前为止，我们只讨论了微分方程的初值问题. 对于二阶线性微分方程,初值问题的力学意义是:已知物体运动的初始位置和初始速度,要求确定其运动规律. 在实际应用中,还会遇到另一类定解问题——边值问题. 许多数学物理问题，需要讨论边值问题.例如捷线问题,即在垂直平面中求过给定两点(a, A)和(b, B)的曲线，使物体在重力作用下以最短的时间沿它从(a, A)移到(b, B). 这时,我们需要求二阶非线性方程

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)=0$$

满足边值条件

$$y(a)=A,\ y(b)=B.$$

的解. 这类问题称为边值问题.

对于二阶线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x), \tag{1}$$

假设 $p(x)$, $q(x)$和 $f(x)$在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是连续的，若给定两个常数 A 和 B, 求方程(1)满足条件

$$y(a)=A,\ y(b)=B \tag{2}$$

的解的问题，称为两点边值问题．条件(2)称为边值条件．如果 $A=B=0$，称条件(2)为齐次边值条件，否则称为非齐次边值条件．

对于上述边值问题，我们要解决下面几个问题：

1° 在什么条件下，二阶线性微分方程(1)的两点边值问题(2)存在唯一的解？

2° 如何表示边值问题(1)、(2)的解？

根据§3，对于二阶线性微分方程(1)，设 $p(x)$，$q(x)$和 $f(x)$ 在区间 $\alpha<x<\beta$ 内是连续的，$x_0\in(\alpha,\beta)$，A 和 B 任意给定，那末(1)的满足初始条件 $y(x_0)=A$，$y'(x_0)=B$ 的解在区间(α,β)内存在且唯一．现在的问题是，如果$[a,b]\subset(\alpha,\beta)$，能否保证边值问题(1)、(2)的解存在且唯一呢？为此，先考虑下面的例题．

[例1] 考察边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=1, \tag{3}$$

$$y(0)=y(\pi)=0. \tag{4}$$

方程(3)的通解是

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+1,$$

其中 C_1 和 C_2 是两个任意常数．由边值条件(4)，得到 C_1、C_2 应满足下列关系式：

$$C_1+1=0,\quad -C_1+1=0.$$

它们是矛盾方程组，即边值问题(3)、(4)是无解的．

它说明两点边值问题不是总有解的．关于二阶齐次线性微分方程的两点边值问题有下述结果．

定理1 设 $p(x)$和 $q(x)$在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，$\varphi_1(x)$和 $\varphi_2(x)$是二阶齐次线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \tag{5}$$

的两个线性无关的解，记

$$\Delta=\begin{vmatrix}\varphi_1(a) & \varphi_2(a)\\ \varphi_1(b) & \varphi_2(b)\end{vmatrix},$$

那末非齐次边值问题(5)、(2)存在唯一解的充要条件是

$$\Delta\neq 0.$$

证　由于 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是(5)的两个线性无关的解，所以它的通解是

$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x),$$

其中 C_1 和 C_2 是两个任意常数. 由边值条件得

$$\begin{aligned}C_1\varphi_1(a)+C_2\varphi_2(a)=A,\\ C_1\varphi_1(b)+C_2\varphi_2(b)=B,\end{aligned}\tag{6}$$

所以当 $\Delta\neq 0$ 时，存在唯一的一组 C_1 和 C_2 满足上式，从而得边值问题(5)、(2)的解存在且唯一. 反之，如果存在唯一的一组 C_1 和 C_2 满足(6)，那末 $\Delta\neq 0$.

系　二阶齐次线性微分方程(5)满足齐次边值条件

$$y(a)=y(b)=0\tag{7}$$

的边值问题有非零解的充要条件是

$$\Delta=0.$$

从定理1的系知道，对于齐次边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0,$$

$$y(a)=y(b)=0,$$

当 $\Delta=0$ 时有非零解，从而有无穷多个解. 在许多实际应用中，这类边值问题是十分重要的. 例如，求参数 λ 使得齐次边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+(\lambda+q(x))y=0,$$

$$y(a)=y(b)=0,$$

有非零解的问题，称为特征值问题.

[例 2]　试问参数 λ 取什么值时，边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0,\tag{8}$$

$$y(0)=y(l)=0\tag{9}$$

有非零解？

解　当 $\lambda<0$ 时，(8)的通解是

$$y(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

根据条件(9)应有

$$c_1+c_2=0,$$
$$c_1e^{\sqrt{-\lambda}l}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0,$$

从而 $c_1=c_2=0$，所以边值问题(8)、(9)无非零解。

当 $\lambda=0$ 时，(8)的通解是

$$y(x)=c_1+c_2x,$$

根据条件(9)得

$$c_1=0,\ c_1+c_2l=0,$$

所以边值问题(8)、(9)无非零解。

当 $\lambda>0$ 时，方程(8)有两个线性无关解

$$y=\cos\sqrt{\lambda}x \quad 和 \quad y=\sin\sqrt{\lambda}x,$$

这时
$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \cos\sqrt{\lambda}l & \sin\sqrt{\lambda}l\end{vmatrix}=\sin\sqrt{\lambda}l$$

因此，当且仅当

$$\sin\sqrt{\lambda}l=0$$

时，该边值问题有非零解，即

$$\lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n=\pm1,\ \pm2,\cdots)$$

是边值问题(8)、(9)的特征值，而相应的非零解是

$$y=\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

称为特征函数。

关于特征值和特征函数问题，我们不详述了。

现讨论非齐次方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x) \tag{10}$$

满足齐次边值条件

$$y(a)=y(b)=0 \tag{11}$$

的解的问题，其中 $p(x)$、$q(x)$ 和 $f(x)$ 在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续。

设 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 都是二阶齐次方程(5)的解，分别满足条件

$$\varphi_1(a)=1,\ \varphi_1'(a)=0;$$
$$\varphi_2(a)=0,\ \varphi_2'(a)=1.$$

现求(5)的解 $k(x,s)$，适合条件

$$k(s,s)=0,\ k_x'(s,s)=1. \tag{12}$$

由于(5)的通解是

$$y=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x),$$

根据条件(12)有

$$c_1\varphi_1(s)+c_2\varphi_2(s)=0,$$
$$c_1\varphi_1'(s)+c_2\varphi_2'(s)=1.$$

所以
$$c_1=\frac{-\varphi_2(s)}{W(s)},\quad c_2=\frac{\varphi_1(s)}{W(s)},$$

其中
$$W(s)\equiv\varphi_1(s)\varphi_2'(s)-\varphi_1'(s)\varphi_2(s),$$

从而
$$k(x,s)=\frac{\varphi_2(x)\varphi_1(s)-\varphi_1(x)\varphi_2(s)}{W(s)},$$

而方程(10)的通解是

$$y=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\int_a^x k(x,s)f(s)ds. \tag{13}$$

现求满足条件(11)的解. 由上式得

$$c_1\varphi_1(a)+c_2\varphi_2(a)=0,$$
$$c_1\varphi_1(b)+c_2\varphi_2(b)+\int_a^b k(b,s)f(s)ds=0,$$

从而当 $\Delta=\varphi_2(b)\neq0$ 时，

$$c_1=0,$$
$$c_2=-\frac{1}{\varphi_2(b)}\int_a^b k(b,s)f(s)ds,$$

即

$$y=-\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}\int_a^b k(b,s)\,f(s)ds+\int_a^x k(x,s)f(s)ds$$
$$=\int_a^x\left\{k(x,s)-\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}\,k(b,s)\right\}f(s)ds$$
$$+\int_x^b\left\{-\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}\,k(b,s)\right\}f(s)ds.$$

因此，如果置

$$G(x, s)=\begin{cases} k(x, s)-\dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}k(b, s), & a\leqslant s\leqslant x; \\ -\dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}k(b, s), & x\leqslant s\leqslant b, \end{cases} \tag{14}$$

那末

$$y=\int_a^b G(x, s)f(s)ds. \tag{15}$$

把 $k(x, s)$ 的表达式代入(14)得

$$G(x, s)=\begin{cases} \dfrac{\varphi_2(s)}{W(s)\varphi_2(b)}\{\varphi_1(b)\varphi_2(x)-\varphi_2(b)\varphi_1(x)\}, \\ \qquad a\leqslant s\leqslant x; \\ \dfrac{\varphi_2(x)}{W(s)\varphi_2(b)}\{\varphi_1(b)\varphi_2(s)-\varphi_2(b)\varphi_1(s)\}, \\ \qquad x\leqslant s\leqslant b. \end{cases} \tag{16}$$

由上式容易证明 $G(x, s)$ 具有下述性质：

1° $G(x, s)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant s\leqslant b$ 上是连续函数；

2° $G(a, s)\equiv G(b, s)\equiv 0$. $(a\leqslant s\leqslant b)$；

3° 作为变量 x 的函数，它在 $s<x\leqslant b$ 和 $a\leqslant x<s$ 中是齐次方程(5)的解；

4° $\dfrac{\partial G(x, s)}{\partial x}=\dfrac{\varphi_2(s)}{W(s)\varphi_2(b)}\{\varphi_1(b)\varphi_2'(x)-\varphi_2(b)\varphi_1'(x)\}$，当 $x>s$ 时，所以

$$\frac{\partial G(s+0, s)}{\partial x}=\frac{\varphi_2(s)}{W(s)\varphi_2(b)}\{\varphi_1(b)\varphi_2'(s)-\varphi_2(b)\varphi_1'(s)\}.$$

同样可得

$$\frac{\partial G(s-0, s)}{\partial x}=\frac{\varphi_2'(s)}{W(s)\varphi_2(b)}\{\varphi_1(b)\varphi_2(s)-\varphi_2(b)\varphi_1(s)\},$$

从而

$$\frac{\partial G(s+0, s)}{\partial x}-\frac{\partial G(s-0, s)}{\partial x}=1.$$

我们称具有上述性质 1°～4° 的函数 $G(x, s)$ 为格林 (Green) 函数. 这时，边值问题(10)、(11)的解可用公式(15)表示.

[例 3] 利用格林函数求解下列边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^x, \tag{17}$$

$$y(-1)=y(1)=0.$$

解 齐次方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

的通解是 $y=c_1+c_2x$. 因此解 $\varphi_1(x)\equiv1$ 和 $\varphi_2(x)\equiv1+x$ 分别适合条件

$$\varphi_1(-1)=1,\ \varphi_1'(-1)=0$$

和
$$\varphi_2(-1)=0,\ \varphi_2'(-1)=1.$$

从而 $W(x)\equiv\varphi_1(x)\varphi_2'(x)-\varphi_1'(x)\varphi_2(x)\equiv1$, $\varphi_2(1)=2$. 因此,格林函数

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}(s+1)(x-1), & -1\leqslant s\leqslant x;\\ \frac{1}{2}(x+1)(s-1), & x\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

边值问题的解是

$$\begin{aligned}y&=\int_{-1}^{1}G(x,s)e^s\,ds\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}(x-1)(s+1)e^s\,ds+\frac{1}{2}\int_{x}^{1}(x+1)(s-1)e^s\,ds\\&=\frac{1}{2}(x-1)(s+1)e^s\Big|_{-1}^{x}-\frac{1}{2}(x-1)\int_{-1}^{x}e^s\,ds\\&\quad+\frac{1}{2}(x+1)(s-1)e^s\Big|_{x}^{1}-\frac{1}{2}(x+1)\int_{x}^{1}e^s\,ds\\&=\frac{1}{2}(x^2-1)e^x-\frac{1}{2}(x-1)(e^x-e^{-1})\\&\quad-\frac{1}{2}(x^2-1)e^x-\frac{1}{2}(x+1)(e-e^x).\end{aligned}$$

所以
$$y=e^x-x\frac{e-e^{-1}}{2}-\frac{e+e^{-1}}{2}.$$

该问题不用格林函数方法而直接求解更简单. 事实上,方程(17)的通解是

$$y=c_1+c_2x+e^x.$$

根据边值条件得

$$c_1-c_2+e^{-1}=0,$$
$$c_1+c_2+e^1=0,$$

从而 $\qquad c_1=-\frac{1}{2}(e+e^{-1}),\quad c_2=-\frac{1}{2}(e-e^{-1}).$

因此边值问题的解是

$$y=e^x-\frac{e-e^{-1}}{2}x-\frac{e+e^{-1}}{2}.$$

习 题

1．求下列边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\lambda y=0,$$
$$y'(0)=y'(\pi)=0$$

的特征值和特征函数.

2．利用格林函数求解边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=x^2,$$
$$y(0)=y(1)=0.$$

3．如果 λ 不是齐次边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0,\ y(0)=y(\pi)=0 \tag{*}$$

的特征值，试证：边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=f(x),\ y(0)=y(\pi)=0 \tag{**}$$

的解存在且唯一.

如果 λ 是齐次边值问题(*)的特征值，试问 $f(x)$ 适合什么条件时边值问题(**)的解存在？解是否唯一？

*§7 希尔方程

在变系数线性微分方程中，以周期函数为系数的方程是很重要的一类．一方面，它的解的一般结构和常系数线性微分方程的

情形类似；另一方面，它也是在许多力学和物理问题中常出现的一类方程. 应当指出，虽然可以讨论这类方程的解的结构，但具体求出它的解还是很少办法. 这一节仅就希尔(Hill)在研究月球运动中所遇到的二阶线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)x=0 \tag{1}$$

叙述这方面的基本知识，这里 $p(t)$ 是周期为 ω 的连续的实值周期函数. 我们称形如(1)的周期系数方程为希尔方程.

首先，假设 $x=\varphi(t)$ 是方程(1)的解，那末 $x=\varphi(t+\omega)$ 也是(1)的解. 事实上，由

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}+p(t)\varphi(t)\equiv 0$$

推知
$$\frac{d^2\varphi(t+\omega)}{dt^2}+p(t+\omega)\varphi(t+\omega)\equiv 0,$$

根据 $p(t+\omega)=p(t)$ 得

$$\frac{d^2\varphi(t+\omega)}{dt^2}+p(t)\varphi(t+\omega)\equiv 0,$$

即 $x=\varphi(t+\omega)$ 是方程(1)的解.

如果 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都是方程(1)的解，并且满足条件

$$x_1(0)=1,\ \dot{x}_1(0)=0;$$
$$x_2(0)=0,\ \dot{x}_2(0)=1,$$

那末它们构成(1)的基本解组，根据上述性质 $x_1(t+\omega)$ 和 $x_2(t+\omega)$ 也都是方程(1)的解，从而存在常数 a_{11}, a_{12} 和 a_{21}, a_{22} 满足

$$\begin{aligned} x_1(t+\omega)&\equiv a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t),\\ x_2(t+\omega)&\equiv a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t), \end{aligned} \tag{2}$$

即
$$\begin{pmatrix} x_1(t+\omega)\\ x_2(t+\omega)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}. \tag{3}$$

公式(2)或(3)对 t 求导得

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t+\omega)\\ \dot{x}_2(t+\omega)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}.$$

在(3)和上式中令 $t=0$ 得

$$\begin{pmatrix} x_1(\omega) \\ x_2(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(\omega) \\ \dot{x}_2(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

因此(3)式可改写为

$$\begin{pmatrix} x_1(t+\omega) \\ x_2(t+\omega) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1(\omega) & \dot{x}_1(\omega) \\ x_2(\omega) & \dot{x}_2(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

若记

$$A = \begin{pmatrix} x_1(\omega) & \dot{x}_1(\omega) \\ x_2(\omega) & \dot{x}_2(\omega) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

那末

$$\begin{pmatrix} x_1(t+\omega) \\ x_2(t+\omega) \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

利用归纳法可得

$$\begin{pmatrix} x_1(t+n\omega) \\ x_2(t+n\omega) \end{pmatrix} \equiv A^n \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

如果 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 是方程(2)的另一基本解组，那末存在常数 s_{11}, s_{12}; s_{21}, s_{22} 使得

$$\varphi_1(t) \equiv s_{11}x_1(t) + s_{12}x_2(t),$$

$$\varphi_2(t) \equiv s_{21}x_1(t) + s_{22}x_2(t),$$

从而

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \equiv S \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

是满秩方阵.

由公式(7)和(5)得

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t+\omega) \\ \varphi_2(t+\omega) \end{pmatrix} \equiv S \begin{pmatrix} x_1(t+\omega) \\ x_2(t+\omega) \end{pmatrix} \equiv SA \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\equiv SAS^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \tag{8}$$

所以，对于不同的基本解组，方程(5)中的系数阵 A 是相似的.

方阵 A 的特征方程是

$$\begin{vmatrix} \lambda-x_1(\omega) & -\dot{x}_1(\omega) \\ -x_2(\omega) & \lambda-\dot{x}_2(\omega) \end{vmatrix}$$
$$=\lambda^2-\{x_1(\omega)+\dot{x}_2(\omega)\}\lambda+\{x_1(\omega)\dot{x}_2(\omega)-\dot{x}_1(\omega)x_2(\omega)\}$$
$$=0.$$

但由刘维尔公式，$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的朗斯基行列式在 $t=\omega$ 处的值等于

$$x_1(\omega)\dot{x}_2(\omega)-\dot{x}_1(\omega)x_2(\omega)$$
$$=\{x_1(0)\dot{x}_2(0)-\dot{x}_1(0)x_2(0)\}\exp\left(\int_0^\omega 0\,ds\right)=1.$$

所以 A 的特征方程是

$$\lambda^2-2\gamma\lambda+1=0, \tag{9}$$

其中 $$2\gamma=x_1(\omega)+\dot{x}_2(\omega).$$

我们称(9)是周期系数方程(1)的特征方程，它的根称为特征根，一般有两个根 λ_1 和 λ_2. 应当指出，希尔方程(1)的特征方程不能根据系数直接确定，仅在知道了基本解组 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 之后才能决定，但不依赖于基本解组的选取.

如果 λ_1 和 λ_2 是特征方程(9)的两个单根，$\lambda_1\neq\lambda_2$，那末存在满秩矩阵 S 使得

$$SAS^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

这时由(7)决定的 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 也是方程(1)的基本解组，根据(8)它适合

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t+\omega) \\ \varphi_2(t+\omega) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{aligned} \varphi_1(t+\omega)&\equiv\lambda_1\varphi_1(t), \\ \varphi_2(t+\omega)&\equiv\lambda_2\varphi_2(t). \end{aligned} \tag{10}$$

取 $\rho_j=\dfrac{1}{\omega}\ln\lambda_j\ (j=1,2)$，其中 $\ln\lambda_j$ 是对数的一支，那末函数

$$g_j(t)\equiv\varphi_j(t)e^{-\rho_j t}\quad(j=1,\ 2)$$

是周期为 ω 的周期函数. 事实上,由(10)得

$$g_j(t+\omega)\equiv\varphi_j(t+\omega)e^{-\rho_j(t+\omega)}$$
$$\equiv\lambda_j\varphi_j(t)e^{-\rho_j t}e^{-\rho_j\omega}\equiv g_j(t)\quad(j=1,\ 2).$$

由于 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 是希尔方程的基本解组,所以希尔方程(1)的任一解可表示为

$$x=c_1g_1(t)e^{\rho_1 t}+c_2g_2(t)e^{\rho_2 t},\tag{11}$$

其中 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 是周期为 ω 的周期函数,c_1 和 c_2 是两个任意常数,$\rho_1=\frac{1}{\omega}\ln\lambda_1$, $\rho_2=\frac{1}{\omega}\ln\lambda_2$, 而 λ_1 和 λ_2 是特征方程(9)的两个根.

因此我们有下述定理:

定理1 设特征方程(9)的两个根为 λ_1 和 λ_2,那末

1° 当 λ_1 和 λ_2 是一对共轭复数时, 希尔方程的每一解在 $-\infty<t<+\infty$ 内是有界的;

2° 当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 是实数时, 希尔方程在 $0\leqslant t<+\infty$ 中必存在无界的解.

证 1° 因为 λ_1 和 λ_2 是共轭复数, 所以 $\gamma^2-1<0$, 从而由(9)得

$$\lambda_1=\gamma+i\sqrt{1-\gamma^2},$$
$$\lambda_2=\gamma-i\sqrt{1-\gamma^2},$$

且
$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=1,$$

从而
$$\rho_1=\frac{1}{\omega}\ln\lambda_1=i\frac{1}{\omega}\arg\lambda_1,$$
$$\rho_2=\frac{1}{\omega}\ln\lambda_2=i\frac{1}{\omega}\arg\lambda_2$$

是纯虚数,由表达式(11)得希尔方程的解在 $-\infty<t<+\infty$ 内是有界的.

2° 当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 是实数时,$\gamma^2>1$,从而

$$\lambda_1=\gamma+\sqrt{\gamma^2-1},\quad \lambda_2=\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}.$$

但 $\lambda_1\lambda_2=1$,所以存在一个 λ_j 的模大于 1,不妨设 $|\lambda_1|>1$,这时

$$\rho_1=\frac{1}{\omega}\ln\lambda_1=\frac{1}{\omega}(\ln|\lambda_1|+i\arg\lambda_1),$$

所以
$$\operatorname{Re}\rho_1>0,$$
从而解
$$x=g_1(t)e^{\rho_1 t}$$
在 $0\leqslant t<+\infty$ 中是无界的. 定理证毕.

当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时, $\gamma^2-1=0$, $\lambda_1=\lambda_2=1$ 或 -1. 这情形我们没有讨论.

由于我们不能直接由 $p(t)$ 算出 γ, 从而我们使用定理 1 时具有某种实质性困难.

下述定理对于应用是方便的.

定理 2 设周期函数 $p(t)$ 满足条件

$$1^\circ \qquad \int_0^\omega p(t)dt\geqslant 0,\ p(t)\not\equiv 0, \tag{12}$$

$$2^\circ \qquad \omega\int_0^\omega |p(t)|dt\leqslant 4, \tag{13}$$

那末希尔方程(1)的每一解是有界的.

为证明该定理需要下述引理.

引理 设 $u(a)=u(b)=0$, $u(t)>0(a<t<b)$, $u(t)$ 二阶连续可微, 那末

$$\int_a^b\left|\frac{\ddot{u}(t)}{u(t)}\right|dt>\frac{4}{b-a}.$$

证 因为 $u(t)$ 在闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是连续的, 它在 $[a,b]$ 上达到最大值 $u_{\max}$. 因此, 当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时,

$$\left|\frac{\ddot{u}(t)}{u(t)}\right|\geqslant\frac{|\ddot{u}(t)|}{u_{\max}},$$

从而
$$\int_a^b\left|\frac{\ddot{u}(t)}{u(t)}\right|dt\geqslant\int_a^b\frac{|\ddot{u}(t)|}{u_{\max}}dt.$$

这里等号不可能成立, 因为如果等号成立, 就有

$$\frac{|\ddot{u}(t)|}{u(t)}=\frac{|\ddot{u}(t)|}{u_{\max}}, \tag{14}$$

设 c 是使 $u(t)=u_{\max}$ 成立的最小的 t, 那末当 $a\leqslant t<c$ 时,

$$u(t)<u_{\max},$$

由(14)式得 $\ddot{u}(t)\equiv 0(a\leqslant t<c)$，所以 $\dot{u}(t)\equiv$常数，且不为0，它与 $\dot{u}(c)=0$ 矛盾．因此(14)不成立，所以

$$\int_a^b\left|\frac{\ddot{u}(t)}{u(t)}\right|dt>\frac{1}{u_{\max}}\int_a^b|\ddot{u}(t)|dt.$$

但当 $a\leqslant t_1<t_2\leqslant b$ 时，

$$\int_a^b|\ddot{u}(t)|dt\geqslant\int_{t_1}^{t_2}|\ddot{u}(t)|dt\geqslant\left|\int_{t_1}^{t_2}\ddot{u}(t)dt\right|,$$

所以
$$\int_a^b|\ddot{u}(t)|dt\geqslant\max_{a\leqslant t_1<t_2\leqslant b}|\dot{u}(t_2)-\dot{u}(t_1)|.$$

设 $u(c)=u_{\max}$，那末根据拉格朗日(Lagrange)定理，存在 t_1 和 t_2 使得 $a<t_1<c$，$c<t_2<b$，且

$$\dot{u}(t_1)=\frac{u(c)-u(a)}{c-a}=\frac{u_{\max}}{c-a},$$

$$\dot{u}(t_2)=\frac{u(c)-u(b)}{c-b}=\frac{-u_{\max}}{b-c}.$$

所以
$$\int_a^b|\ddot{u}(t)|dt\geqslant u_{\max}\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right).$$

从而
$$\int_a^b\left|\frac{\ddot{u}(t)}{u(t)}\right|dt>\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right).$$

但当 $a<c<b$ 时，

$$\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\geqslant\frac{1}{b-\frac{a+b}{2}}+\frac{1}{\frac{a+b}{2}-a}=\frac{4}{b-a}.$$

因此
$$\int_a^b\left|\frac{\ddot{u}(t)}{u(t)}\right|dt>\frac{4}{b-a}.$$

引理证毕．

定理2的证明 如果希尔方程存在无界的解，根据定理1，它的特征方程(9)的根不是共轭复数，从而是实根．因而希尔方程具有非零解 $\varphi(t)$ 适合关系

$$\varphi(t+\omega)=\lambda\varphi(t),\tag{15}$$

其中 λ 是(9)的实根．

如果 $\varphi(t)$ 存在零点 a，即 $\varphi(a)=0$，由(15)得

$$\varphi(a+\omega)=0.$$

所以 $\varphi(t)$ 的两个相邻零点 a 和 b 之间的距离 $b-a\leqslant\omega$．不妨设

$$\varphi(a)=\varphi(b)=0,$$

$$\varphi(t)>0\quad(a<t<b).$$

这时

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+p(t)\varphi(t)\equiv 0,$$

从而当 $a<t<b$ 时，

$$\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}\equiv -p(t).$$

所以根据引理得

$$\int_a^b|p(t)|dt=\int_a^b\left|\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}\right|dt>\frac{4}{b-a}\geqslant\frac{4}{\omega}.$$

又

$$\int_0^\omega|p(t)|dt=\int_a^{a+\omega}|p(t)|dt\geqslant\int_a^b|p(t)|dt,$$

所以

$$\int_0^\omega|p(t)|dt>\frac{4}{\omega}.$$

它与 2° 矛盾．这就是说 $\varphi(t)$ 没有零点，即 $\varphi(t)\neq 0$．

当 $\varphi(t)\neq 0$ 时

$$\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}+p(t)\equiv 0,$$

所以

$$\int_0^\omega p(t)dt=\int_0^\omega\frac{-\ddot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}dt=-\int_0^\omega\frac{1}{\varphi(t)}\frac{d\dot{\varphi}(t)}{dt}dt$$

$$=-\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}\bigg|_0^\omega-\int_0^\omega\frac{\dot{\varphi}^2(t)}{\varphi^2(t)}dt.$$

而由(15)得

$$\dot{\varphi}(t+\omega)=\lambda\dot{\varphi}(t),$$

所以

$$\frac{\dot{\varphi}(t+\omega)}{\varphi(t+\omega)}=\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}.$$

因此当 $\dot{\varphi}(t)\neq 0$ 时

$$\int_0^\omega p(t)dt=-\int_0^\omega\frac{\dot{\varphi}^2(t)}{\varphi^2(t)}dt<0,$$

它与

$$\int_0^\omega p(t)dt\geqslant 0$$

矛盾．如果 $\dot{\varphi}(t)\equiv 0$，$\varphi(t)\neq 0$，那末 $\ddot{\varphi}(t)\equiv 0$，从而

$$p(t)\varphi(t)\equiv 0,$$

即 $p(t)\equiv 0$，它与 $p(t)\not\equiv 0$ 矛盾.

因此，存在非零解 $\varphi(t)$ 适合关系式(15)将导致与定理 2 的假设矛盾，从而得证定理 2.

定理 3 设 $p(t)\leqslant 0$，那末希尔方程(1)在区间 $0\leqslant t<+\infty$ 中存在无界解.

证 设解 $x=\varphi(t)$ 满足初值条件 $\varphi(0)>0$, $\dot{\varphi}(0)>0$ 及方程(1)：

$$\ddot{\varphi}(t)+p(t)\varphi(t)\equiv 0,$$

所以

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)\equiv\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\varphi(t)\ddot{\varphi}(t)$$

$$\equiv\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-p(t)\varphi^2(t)\geqslant 0,$$

从而

$$\varphi(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}\geqslant\varphi(0)\dot{\varphi}(0)>0,$$

所以

$$\frac{d}{dt}\varphi^2(t)\geqslant 2\varphi(0)\dot{\varphi}(0),$$

$$\varphi^2(t)-\varphi^2(0)\geqslant 2\varphi(0)\dot{\varphi}(0)t.$$

即 $\varphi(t)$ 是无界的. 定理证毕.

[例 1] 微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}-(a^2\sin^2\omega t)x=0$$

的解不可能都是有界的.

[例 2] 试讨论马蒂厄(Mathieu)方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a(1+k\sin bt)x=0,$$

其中 $b>0$, $-1\leqslant k\leqslant 1$.

解 当 $a\leqslant 0$ 时，它的解不都是有界的.

当 $a>0$ 时，如果

$$\int_0^{\frac{2\pi}{b}} a(1+k\sin bt)dt=\frac{a}{b}\cdot 2\pi\leqslant\frac{4}{\frac{2\pi}{b}}=\frac{2b}{\pi},$$

即
$$a\pi^2\leqslant b^2,$$

那末方程的每一解是有界的。

习 题

设 $r(t)$ 和 $p(t)$ 都是周期为 ω 的连续函数，$r(t)>0$，$\dot{r}(t)$ 和 $\ddot{r}(t)$ 连续，讨论二阶周期系数线性微分方程

$$\frac{d}{dt}\left\{r(t)\frac{dx}{dt}\right\}+p(t)x=0$$

的解的结构及解的有界性。

第 四 章

常微分方程的基本理论

前几章，我们总是设法先求微分方程的通解，再根据给定的条件(例如初值条件或边值条件)确定它的特解．但是，刘维尔曾证明黎卡提方程(除一些特殊情形外)一般不能用初等积分法求解．因此，由通解求特解的方法在实际进行时是存在困难的．另一方面，在第三章中我们先讨论了线性微分方程组初值问题的解的存在性和唯一性，并由此建立了线性微分方程组解的结构理论．这样我们看出，对于非线性微分方程，应当先讨论方程满足给定条件的特解是否存在，特解是否唯一，以及怎样近似确定满足给定条件的特解？这些问题具有重要的理论意义和实际意义．

本章讨论微分方程的初值问题解的存在性和唯一性，解对初值或参数的连续性、可微性等．它们是常微分方程基本理论的主要部分．

§1 初值问题解的存在性和唯一性

一、导数已解出的一阶方程的初值问题

导数已解出的一阶微分方程是

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x). \tag{1}$$

设给定了 t_0 和 x_0，寻求方程(1)满足初值条件

$$x(t_0)=x_0 \tag{2}$$

的解 $x=x(t)$ 的问题，称为初值问题．

为了讨论初值问题，我们应当假设函数 $f(t,\ x)$ 在平面区域 D

内是连续的，并且给定的初值(t_0, x_0)位于 D 内．所谓解 $x=x(t)$ 满足条件(2)，是指 $x(t)$在含有 t_0 的开区间 $\alpha<t<\beta$ 内满足方程

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t, x(t)), \alpha<t<\beta,$$

并且

$$x(t_0)=x_0.$$

我们先证下述定理.

定理 1 对于给定的微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x) \tag{1}$$

和初值条件

$$x(t_0)=x_0, \tag{2}$$

假设函数 $f(t, x)$在闭的矩形区域

$$\bar{R}: \ |t-t_0|\leqslant a, \ |x-x_0|\leqslant b$$

上是连续的，并且关于 x 满足李普希兹(Lipschitz)条件，即存在正的常数 $N>0$，使得当$(t, x_1)\in\bar{R}$，$(t, x_2)\in\bar{R}$ 时成立着不等式

$$|f(t, x_1)-f(t, x_2)|\leqslant N|x_1-x_2|,$$

那末，在区间 $t_0-h\leqslant t\leqslant t_0+h$ 上存在唯一的连续可微的函数 $x=\varphi(t)$适合微分方程(1)，即

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=f(t, \varphi(t)), \ t_0-h\leqslant t\leqslant t_0+h$$

和初值条件

$$\varphi(t_0)=x_0,$$

这里

$$h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right), \tag{3}$$

而

$$M=\max_{(t,x)\in\bar{R}}|f(t, x)|. \tag{4}$$

注 1. 我们知道线性微分方程组初值问题的解的定义区间就是方程系数的定义区间，但在这里区间 $t_0-h\leqslant t\leqslant t_0+h$ 一般较区间 $t_0-a\leqslant t\leqslant t_0+a$ 为小.

注 2. 方程(1)满足条件(2)的解 $x=\varphi(t)$ $(\alpha<t<\beta)$ 等价于积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \tag{5}$$

在 $\alpha<t<\beta$ 内的连续解 $x=\varphi(t)$.

事实上,如果 $x=\varphi(t)$ 在 $\alpha<t<\beta$ 内连续可微,满足方程(1),即

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}\equiv f(t, \varphi(t))$$

及初值条件(2),对上式从 t_0 到 t 积分就得到

$$\varphi(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \tag{6}$$

即 $x=\varphi(t)$ 在 $\alpha<t<\beta$ 内是积分方程(5)的解,并且是连续的.

反之,若在区间 $\alpha<t<\beta$ 内连续的函数 $\varphi(t)$ 是积分方程(5)的解,那末(6)在 $\alpha<t<\beta$ 内成立. 因此,当 $t=t_0$ 时得

$$\varphi(t_0)=x_0,$$

又因为 $f(t, \varphi(t))$ 在 $\alpha<t<\beta$ 内是连续的,所以(6)的右端关于 t 是连续可微的,(6)的两端对 t 求导就得

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}\equiv f(t, \varphi(t)).$$

这就是说,微分方程(1)的初值问题(2)可转化为积分方程(5)的求解问题.

定理的证明 根据注 2, 现在利用在第三章用过的逐次逼近法证明: 积分方程(5)在闭区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上的连续解存在且唯一.

设第零次近似为

$$\varphi_0(t)\equiv x_0 (\text{常数函数}),$$

再逐次定义第一次、第二次、…、第 k 次近似如下:

$$\varphi_1(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_0(s))ds, \tag{7}$$

$$\varphi_2(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s))ds, \tag{8}$$

……………………………………

$$\varphi_k(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{k-1}(s))ds. \tag{9}$$

我们要证明：当$|t-t_0|\leqslant h$时，

$$\varphi_0(t),\ \varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_k(t),\ \cdots$$

是连续的，并且

$$(t,\ \varphi_k(t))\in\bar{R},$$

即当$|t-t_0|\leqslant h$时成立着

$$|\varphi_k(t)-x_0|\leqslant b; \tag{10}$$

并且证明$\{\varphi_k(t)\}$一致收敛于积分方程(5)的解.

首先，$x=\varphi_0(t)$在$|t-t_0|\leqslant a$上是连续的，且$(t,\ \varphi_0(t))\in\bar{R}$，因此$f(t,\ \varphi_0(t))$在$|t-t_0|\leqslant a$上是连续的，从而可由(7)定义第一次近似$\varphi_1(t)$，它在$|t-t_0|\leqslant a$上是连续的，还需证明(10)对于$k=1$成立。事实上，由(7)得

$$|\varphi_1(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(s,\ x_0)ds\right|\leqslant M|t-t_0|, \tag{11}$$

所以当$|t-t_0|\leqslant h$时

$$|\varphi_1(t)-x_0|\leqslant Mh\leqslant b,$$

即
$$(t,\ \varphi_1(t))\in\bar{R}.$$

因此可由(8)定义第二次近似$\varphi_2(t)$。一般地，设当$|t-t_0|\leqslant h$时

$$|\varphi_{k-1}(t)-x_0|\leqslant b,$$

就知道$f(t,\ \varphi_{k-1}(t))$在$|t-t_0|\leqslant h$上是连续的，并且可以由(9)定义第k次近似，并且

$$|\varphi_k(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi_{k-1}(s))ds\right|\leqslant M|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b.$$

这就是说(10)成立。因此，函数序列$\varphi_0(t),\ \varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_k(t),\ \cdots$在闭区间$|t-t_0|\leqslant h$上是连续的.

其次，证明当$k\to+\infty$时$\varphi_k(t)$在$|t-t_0|\leqslant h$上是一致收敛的.

根据(8)和(7)得

$$|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}\{f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_0(s))\}ds\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,\ \varphi_1(s))-f(s,\ \varphi_0(s))|ds\right|,$$

因为 $f(t, x)$ 关于 x 满足李普希兹条件，由上式得

$$|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|\leqslant N\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|ds\right|.$$

但据不等式(11)知 $|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)|\leqslant M|t-t_0|$，所以

$$|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|\leqslant NM\left|\int_{t_0}^{t}(s-t_0)ds\right|=\frac{NM}{2!}(t-t_0)^2. \quad (12)$$

一般地，假设已证：当 $|t-t_0|\leqslant h$ 时

$$|\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)|\leqslant\frac{MN^{k-1}}{k!}|t-t_0|^k, \quad (13)$$

那末由

$$|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}\{f(s,\varphi_k(s))-f(s,\varphi_{k-1}(s))\}ds\right|$$

$$\leqslant N\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi_k(s)-\varphi_{k-1}(s)|ds\right|$$

得

$$|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)|\leqslant\frac{MN^k}{k!}\left|\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^k ds\right|$$

$$=\frac{MN^k}{(k+1)!}|t-t_0|^{k+1},$$

所以不等式(13)对于 $k=1, 2, \cdots$ 都成立。

因此，当 $|t-t_0|\leqslant h$ 时

$$|\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)|\leqslant\frac{MN^{k-1}h^k}{k!} \quad (k=1, 2, \cdots).$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{MN^{k-1}h^k}{k!}.$$

由于正项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{MN^{k-1}h^k}{k!}$$

收敛，所以级数

$$\varphi_0(t)+[\varphi_1(t)-\varphi_0(t)]+\cdots+[\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)]+\cdots$$

在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上是一致收敛的，即得当 $k\to+\infty$ 时 $\varphi_k(t)$ 在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上是一致收敛于一连续函数 $\varphi(t)$ 的。

又因为不等式(10)成立，当 $k\to+\infty$ 时得

$$|\varphi(t)-x_0|\leqslant b\quad(|t-t_0|\leqslant h),$$

即 $(t,\varphi(t))\in\bar{R}$，根据 $f(t,x)$ 关于 x 满足李普希兹条件，所以

$$|f(t,\varphi_k(t))-f(t,\varphi(t))|\leqslant N|\varphi_k(t)-\varphi(t)|.$$

因此，当 $k\to+\infty$ 时 $f(t,\varphi_k(t))$ 一致收敛于 $f(t,\varphi(t))$. 这样，在下式中

$$\varphi_{k+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_k(s))ds$$

令 $k\to+\infty$ 就得到

$$\varphi(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))ds,$$

即积分方程(5)存在解 $x=\varphi(t)$，它在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上是连续的. 这也就证明了微分方程(1)的初值问题(2)的解存在.

最后证明初值问题解的唯一性. 设 $x=\psi(t)$ 是积分方程(5)在闭区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上的连续解，这时

$$\psi(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\psi(s))ds. \tag{14}$$

所以

$$|\psi(t)-x_0|\leqslant M|t-t_0|,$$

即

$$|\psi(t)-\varphi_0(t)|\leqslant M|t-t_0|. \tag{15}$$

由(14)式减去(7)式得

$$\psi(t)-\varphi_1(t)=\int_{t_0}^{t}\{f(s,\psi(s))-f(s,\varphi_0(s))\}ds,$$

从而

$$|\psi(t)-\varphi_1(t)|\leqslant N\left|\int_{t_0}^{t}|\psi(s)-\varphi_0(s)|ds\right|.$$

把(15)式代入上式得

$$|\psi(t)-\varphi_1(t)|\leqslant\frac{MN}{2!}|t-t_0|^2.$$

和前面一样，可以用归纳法证明

$$|\psi(t)-\varphi_k(t)|\leqslant\frac{MN^k}{(k+1)!}|t-t_0|^{k+1}. \tag{16}$$

因此 $\psi(t)$ 也是 $\varphi_k(t)$ 当 $k\to+\infty$ 时的极限，即得

$$\psi(t)\equiv\varphi(t).$$

因此解的唯一性得证.

注 3. 近似解与误差估计

在定理的证明中已经给出了第 k 次近似和初值问题的解之差的估计式,即当 $|t-t_0|\leqslant h$ 时,

$$|\varphi(t)-\varphi_k(t)|\leqslant\frac{MN^k}{(k+1)!}|t-t_0|^{k+1}. \tag{17}$$

[例 1] 试讨论微分方程

$$\frac{dx}{dt}=t^2+x^2$$

满足初值条件 $x(0)=0$ 的解的存在区间和误差小于 0.05 的近似解.

解 由于方程右端在整个平面上有定义,所以对于任意给定的 $a>0$ 和 $b>0$,方程右端在闭矩形 $\bar{R}_{a,b}$:

$$|t|\leqslant a,\ |x|\leqslant b$$

上是连续的,并且

$$M=\max_{(t,x)\in\bar{R}_{a,b}}(t^2+x^2)=a^2+b^2,$$

从而定理中的 h 由下式决定:

$$h=\min\left(a,\ \frac{b}{M}\right)=\min\left(a,\ \frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

当 $a>0$ 固定时,$\frac{b}{a^2+b^2}$ 作为 b 的函数在 $b=a$ 时达到最大值 $\frac{1}{2a}$,这时

$$h=\min\left(a,\ \frac{1}{2a}\right).$$

当 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,h 达到最大值

$$h=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

这就是说,如果取 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$,那末由(3)决定的 h 取最大值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,即微分方程满足初值条件 $x(0)=0$ 的解 $x=\varphi(t)$ 至少在闭区间

$|t|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 上是存在的。

为估计近似解的误差，我们在 R：$|t|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，$|x|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 上计算 M 和 N 的值：

$$M=\max_{R}(t^2+x^2)=1,$$

$$N=\max\frac{|t^2+x_1^2-(t^2+x_2^2)|}{|x_1-x_2|}=\max|x_1+x_2|=\sqrt{2}.$$

因此，当 $k=3$，$|t|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，(17)的右端小于

$$\frac{(\sqrt{2})^3}{4!}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{1}{24\cdot\sqrt{2}}<0.0295,$$

即当 $|t|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，

$$|\varphi(t)-\varphi_3(t)|<0.0295.$$

但是，若 $\varphi_0(t)\equiv0$，那末

$$\varphi_1(t)=\int_0^t(s^2+\varphi_0^2(s))ds=\frac{1}{3}t^3,$$

$$\varphi_2(t)=\int_0^t\left(s^2+\frac{1}{9}s^6\right)ds=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{63}t^7,$$

$$\varphi_3(t)=\int_0^t\left(s^2+\frac{1}{9}s^6+\frac{2}{189}s^{10}+\frac{1}{3969}s^{14}\right)ds$$

$$=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{63}t^7+\frac{2}{2079}t^{11}+\frac{1}{59535}t^{15}.$$

当 $|t|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，

$$|\varphi_3(t)-\varphi_1(t)|\leqslant\frac{1}{63}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7+\frac{2}{2079}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{11}$$

$$+\frac{1}{59535}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{15}<0.0015.$$

所以当 $|t|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时

$$\left|\varphi(t)-\frac{1}{3}t^3\right|<0.031<0.05,$$

即第一次近似 $\varphi_1(t)=\frac{1}{3}t^3$ 已给出了所需精度的近似解. 而如果用(17)式, $k=1$ 时, 误差为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 这表明, (17)的误差估计太粗.

为了得到近似解误差的更高精度估计, 我们在区间 $0\leqslant t\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 上利用微分不等式来进行. 至于当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant t\leqslant 0$ 时的情形, 留给读者完成.

首先, 由于

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=t^2+\varphi^2(t), \tag{18}$$

所以 $\frac{d\varphi}{dt}\geqslant t^2$, 从而

$$\varphi(t)\geqslant\frac{1}{3}t^3.$$

把它代入(18)的右端得

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}\geqslant t^2+\frac{1}{9}t^6$$

从而

$$\varphi(t)\geqslant\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{63}t^7. \tag{19}$$

再把它代入(18)的右端得

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}\geqslant t^2+\frac{1}{9}t^6+\frac{2}{189}t^{10}+\frac{1}{3969}t^{14},$$

从而

$$\varphi(t)\geqslant\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{63}t^7+\frac{2}{2079}t^{11}+\frac{1}{59535}t^{15}. \tag{20}$$

反之, 由于 $\varphi(t)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以由(18)得

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}\leqslant 1,$$

从而
$$\varphi(t)\leqslant t.$$
把它代入(18)的右端得
$$\frac{d\varphi(t)}{dt}\leqslant t^2+t^2=2t^2,$$
从而
$$\varphi(t)\leqslant\frac{2}{3}t^3.$$
再把它代入(18)的右端得
$$\frac{d\varphi(t)}{dt}\leqslant t^2+\frac{4}{9}t^6,$$
从而
$$\varphi(t)\leqslant\frac{1}{3}t^3+\frac{4}{63}t^7.$$
再把它代入(18)的右端得
$$\frac{d\varphi(t)}{dt}\leqslant t^2+\frac{1}{9}t^6+\frac{8}{189}t^{10}+\frac{16}{3969}t^{14},$$
从而
$$\varphi(t)\leqslant\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{63}t^7+\frac{8}{2079}t^{11}+\frac{16}{59535}t^{15}. \tag{21}$$
由上式和(19)式得
$$0\leqslant\varphi(t)-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{63}t^7\leqslant\frac{8}{2079}t^{11}+\frac{16}{59535}t^{15}<0.00009.$$
如果再把(21)代入(18)的右端，就得到
$$\frac{d\varphi(t)}{dt}\leqslant t^2+\frac{1}{9}t^6+\frac{2}{189}t^{10}+\left(\frac{1}{3969}+\frac{16}{6237}\right)t^{14}+\cdots,$$
所以
$$\varphi(t)\leqslant\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{63}t^7+\frac{2}{2079}t^{11}+\frac{t^{15}}{59535}$$
$$+\frac{16}{15\times 6237}t^{15}+\cdots.$$
由上式和(20)式得
$$0\leqslant\varphi(t)-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{63}t^7-\frac{2}{2079}t^{11}-\frac{1}{59535}t^{15}$$
$$\leqslant\frac{16}{93555}t^{15}+\cdots<10^{-6}.$$

因此，当 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，

$$0\leqslant\varphi(t)-\varphi_2(t)<9\times10^{-5},$$
$$0\leqslant\varphi(t)-\varphi_3(t)<10^{-6}.$$

注 4. 如何验证 $f(t, x)$ 关于 x 满足李普希兹条件呢?

假设 $f(t, x)$ 关于 x 的偏导数 $\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ 在 $\bar{R}$ 上是有界的，即当 $(t, x)\in\bar{R}$ 时

$$\left|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right|\leqslant N,$$

那末根据拉格朗日中值定理得

$$|f(t, x_1)-f(t, x_2)|=\left|\frac{\partial f(t, x_2+\theta(x_1-x_2))}{\partial x}(x_1-x_2)\right|$$
$$\leqslant N|x_1-x_2|,$$

即 $f(t, x)$ 关于 x 满足李普希兹条件．这是充分条件．

函数 $f(t, x)\equiv|x|$ 是满足李普希兹条件的，但 $\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ 在 $x=0$ 处不存在．

又假设当 $x\neq x_0$ 时 $\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ 存在，并且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}=\infty,$$

那末 $f(t, x)$ 在含有 (t_0, x_0) 的任一区域内关于 x 不满足李普希兹条件．例如 $f(t, x)\equiv x^{\frac{2}{3}}$，它在全平面上是连续的，且当 $x\neq0$ 时 $\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ 是存在的，而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}=\infty$．所以 $x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 附近不满足李普希兹条件．否则，存在 $N>0$ 使得 $|x^{\frac{2}{3}}-0^{\frac{2}{3}}|\leqslant N|x-0|$，从而 $|x|^{\frac{2}{3}}\leqslant N|x|$，即 $|x|^{\frac{1}{3}}\geqslant\dfrac{1}{N}$．但在 $x=0$ 附近，上式不成立．这样，微分方程

$$\frac{dx}{dt}=x^{\frac{2}{3}}\tag{22}$$

在含有 t 轴上点的区域内不满足定理 1 的条件．

容易验证 $x\equiv 0$ 和 $x\equiv \frac{1}{27}t^3$ 都是方程(22)的解，它们都以(0, 0)为初值. 该例表明，当李普希兹条件不满足时，初值问题的解可能不唯一.

注 5. 关于定理中 h 的几何解释.

在定理 1 中 $|f(t, x)|\leqslant M$，所以微分方程(1)的积分曲线的切线斜率都位于 $-M$ 和 M 之间. 如果过初值点 $P(t_0, x_0)$ 引斜率为 $-M$ 和 M 的两条直线，它们和 $\bar{R}$ 的边界交于 B、C_1 和 B_1、C. 显然，过点(t_0, x_0)的积分曲线必位在角状区域 B_1PC_1 和角状区域 BPC 中.

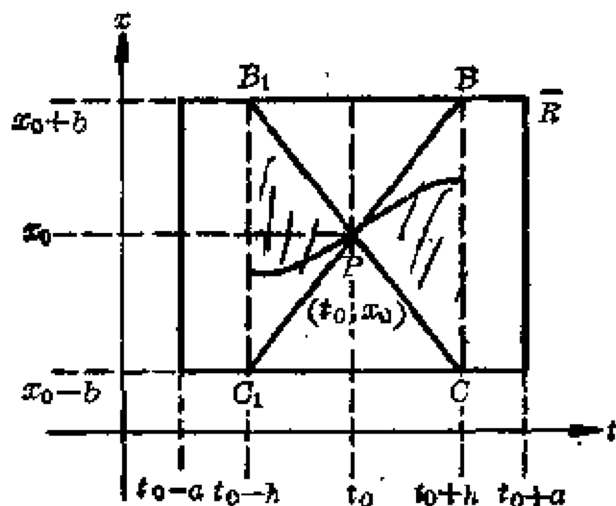


图 4.1

对于微分方程(1)，假设函数 $f(t, x)$ 在区域 D 内是连续的，初值(t_0, x_0)位于 D 内. 做一个以(t_0, x_0)为中心的闭矩形区域 $\bar{R}$ 位于 D 内. 设 $f(t,x)$ 在 $\bar{R}$ 上关于 x 满足李普希兹条件，在 $\bar{R}$ 上运用定理 1 就可以证明下述定理.

定理 2　设 $f(t, x)$在区域 D 内是连续的，并且在 D 的任一有界闭子域 $\bar{D}_1$ 上，$f(t, x)$关于 x 满足李普希兹条件，即存在常数 N (它可能与 $\bar{D}_1$ 有关)使得不等式

$$|f(t, x_1)-f(t, x_2)|\leqslant N|x_1-x_2|$$

对 $\bar{D}_1$ 上的任一对点(t, x_1)和(t, x_2)成立，那末对于$(t_0, x_0)\in D$，微分方程(1)满足初值条件(2)的解 $x=\varphi(t)$存在且唯一.

关于解 $\varphi(t)$的存在区间可如下确定. 设 $\bar{D}_1$ 是位于 D 内且含有点(t_0, x_0)的有界闭子域，$|f(t, x)|$在 $\bar{D}_1$ 上的最大值为 M. 过 $P(t_0, x_0)$引斜率为 M 和 $-M$ 的直线，它们分别和 $\bar{D}_1$ 的边界相交，从而可以做出完全位于 $\bar{D}_1$ 上的三角形 BPC 和 B_1PC_1(如

图 4.2)，设直线 BC 和 B_1C_1 的方程分别为 $t=r_2$ 和 $t=r_1$，那末 $\varphi(t)$ 在闭区间 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上存在．这是因为过 $(t_0,\ x_0)$ 的积分曲线必位于三角形 BPC 和 B_1PC_1 中的缘故．

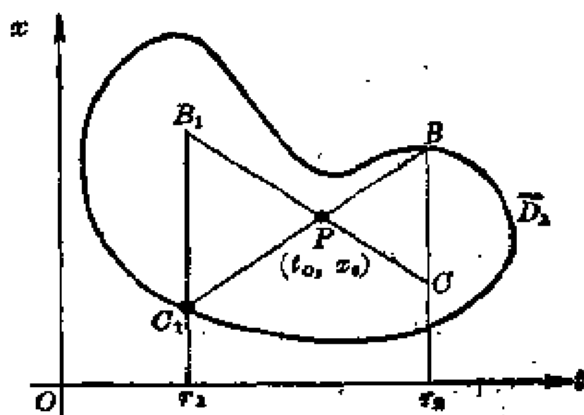


图　4.2

二、解的延展

前面我们证明了微分方程(1)满足初值条件(2)的解在某一包含 t_0 的闭区间 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上存在，但是一般说来 r_2-r_1 是较小的．然而，我们知道线性微分方程组解的存在区间是方程系数在其上连续的区间．就是说，对于非线性微分方程，解的存在区间是局部的；而对于线性微分方程组，解的存在区间是整体的．人们自然要问：对于非线性微分方程(1)，解的存在区间能否扩展？能扩展到何处？为此，我们先看下面的例子．

[例 2]　试讨论微分方程

$$\frac{dx}{dt}=1+x^2$$

满足初值条件

$$x(0)=0$$

的解的存在区间．

显然 $x=\operatorname{tg} t$ 是所述问题的解，它的存在区间是开区间 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，尽管方程的定义范围为全平面．

如果运用定理1所用的逐次逼近法，矩形 $\overline{R}$ 是

$$|t|\leqslant a,\ |x|\leqslant b;$$

那末

$$\max_{(t,x)\in\overline{R}}|1+x^2|=1+b^2,$$

从而

$$h=\min\left(a,\ \frac{b}{1+b^2}\right).$$

但 $\frac{b}{1+b^2}\leqslant\frac{1}{2}$，当 $b=1$ 时等号成立．如果取 $a\geqslant\frac{1}{2}$，$b=1$，那末由上式只能得到 $h=\frac{1}{2}$，即只能肯定解的存在区间是 $|t|\leqslant\frac{1}{2}$，不能断定解在 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ 内存在．

显然，如果以 $\left(\frac{1}{2},\ \mathrm{tg}\ \frac{1}{2}\right)$ 为初值，利用定理 1 可以断定解的存在区间向右扩大了．我们知道，向右扩展解的存在区间不能超过 $\frac{\pi}{2}$．同样，向左不能超过 $-\frac{\pi}{2}$．

现把微分方程解的存在区间扩展的问题一般化如下．假设 $x=\varphi(t)$ 在区间 $\alpha<t<\beta$（或 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$）内是方程(1)的解，如果 $x=\psi(t)$ 在区间 $\gamma<t<\delta$ 内也是方程(1)的解，并且 $\delta>\beta$，$\gamma<\alpha$，当 $t\in(\alpha,\ \beta)$ 时 $\psi(t)\equiv\varphi(t)$，我们称解 $\psi(t)$ 是解 $\varphi(t)$ 的延展，即把解 $x=\varphi(t)$ 的存在区间扩展到区间 $\gamma<t<\delta$ 了．

引理 1　设 $f(t,\ x)$ 适合定理 2 的条件，$x=\varphi(t)$ 在闭区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上是方程(1)的解，那末解 $x=\varphi(t)$ 的存在区间必可延展．

证　因为点 $(\beta,\ \varphi(\beta))\in D$，根据定理 2 必存在以 $(\beta,\ \varphi(\beta))$ 为初值的解 $x=\psi(t)$，它在 $[\beta-h,\ \beta+h]$ 上存在，并且当 $t\in[\alpha,\beta]\cap[\beta-h,\ \beta+h]$ 时 $\psi(t)\equiv\varphi(t)$，如果规定 $\varphi(t)$ 当 $\beta\leqslant t\leqslant\beta+h$ 时是 $\psi(t)$，那末解的存在区间向右方扩展了；同样可向左方延展．

引理 2　在定理 2 的条件下，假设 $x=\varphi(t)$ 在 $\alpha<t<\beta$ 内是方程(1)的解，极限

$$\varphi(\beta-0)=\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t)$$

存在，并且 $(\beta,\ \varphi(\beta-0))\in D$，那末存在 $\delta>\beta$，使得解 $\varphi(t)$ 可向右延展到 $(\alpha,\ \delta)$．

证　因为 $(\beta,\ \varphi(\beta-0))$ 在 D 中，根据定理 2，微分方程(1)存在以 $(\beta,\ \varphi(\beta-0))$ 为初值的解 $x=\psi(t)$，它在 $\beta-h\leqslant t\leqslant\beta+h$ 上存在，$h>0$．若置

$$x(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \text{当 } \alpha<t<\beta \text{ 时},\\ \psi(t), & \text{当 } \beta\leqslant t\leqslant\beta+h \text{ 时},\end{cases}$$

那末 $x(t)$ 在 $\alpha<t\leqslant\beta+h$ 上是连续的. 并且当 $\alpha<t<\beta$ 时,

$$\varphi(t)\equiv\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi(s))ds.$$

令 $t\to\beta-0$ 得

$$\varphi(\beta-0)=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{\beta}f(s,\ \varphi(s))ds;$$

又当 $\beta\leqslant t\leqslant\beta+h$ 时

$$\psi(t)\equiv\varphi(\beta-0)+\int_{\beta}^{t}f(s,\ \psi(s))ds,$$

所以当 $\beta\leqslant t\leqslant\beta+h$ 时

$$\psi(t)\equiv\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{\beta}f(s,\ \varphi(s))ds+\int_{\beta}^{t}f(s,\ \psi(s))ds$$

$$\equiv\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(s,\ x(s))ds.$$

因此, 当 $\alpha<t\leqslant\beta+h$ 时

$$x(t)\equiv\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(s,\ x(s))ds,$$

即 $x=x(t)$ 在区间 $\alpha<t<\beta+h$ 内是微分方程(1)的解, 它就是解 $x=\varphi(t)$ 的延展.

引理3 在定理2的条件下, 假设 $x=\varphi(t)$ 在 $\alpha<t<\beta$ 内是微分方程(1)的解, 并且存在 $t_n\in(\alpha,\ \beta)$, 使得 $t_n\to\beta-0$ 且极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(t_n)=c$ 存在, 点 $(\beta,\ c)\in D$, 那末存在 $\delta>\beta$, 使得解 $x=\psi(t)$ 的存在区间可延展到 $\alpha<t<\delta$.

证 因为点 $(\beta,\ c)\in D$, 所以存在以 $(\beta,\ c)$ 为中心的闭正方形 $\bar{R}$ 含在 D 内. 设 $\bar{R}$ 的边长为 $2\varepsilon_0$, $|f(t,\ x)|$ 在 $\bar{R}$ 上的最大值为 M.

因为点列 $(t_n,\ \varphi(t_n))\to(\beta,\ c)$, 所以当 n 充分大时, 点 $(t_n,\varphi(t_n))$ 与点 $(\beta,\ c)$ 之间的距离小于 $\frac{\varepsilon_0}{2}$. 这时, 若以 $(t_n,\ \varphi(t_n))$ 为中心、ε_0 为边长做一正方形 $\bar{R}_n$, 那末 $\bar{R}_n\subset\bar{R}\subset D$.

根据定理1, 以 $(t_n,\ \varphi(t_n))$ 为初值的解 $x=\psi(t)$ 在闭区间 $t_n-h\leqslant t\leqslant t_n+h$ 上存在, 其中

$$h=\min\left(\frac{\varepsilon_0}{2},\ \frac{\varepsilon_0}{2M}\right),$$

即解 $x=\varphi(t)$ 可以延展到区间 $\alpha<t<t_n+h$. 由于 $t_n\to\beta$, 所以当 n 充分大时 $t_n+h>\beta+\frac{h}{2}$, 从而解 $\varphi(t)$ 的存在区间可以延展到 β 的右方.

上述引理表明, 如果解 $x=\varphi(t)$ 的存在区间不可能再延展, 那末该区间只能是开区间, 记之为 $\alpha<t<\beta$(α 可能是有限值, 也可能是 $-\infty$; β 可能是有限值, 也可能是 $+\infty$), 我们称 $\alpha<t<\beta$ 为解 $x=\varphi(t)$ 的**最大存在区间**.

定理 3　设 $f(t,x)$ 在有界区域 D 内是连续的, 在 D 的任一闭子域上关于 x 满足李普希兹条件. 如果解 $x=\varphi(t)$ 的最大存在区间为 $\alpha<t<\beta$, 那末当 $t\to\beta-0$ 时, 点 $(t,\varphi(t))$ 与区域 D 的边界 Γ 的距离趋于 0.

证　如果不是这样, 即存在 $\varepsilon_0>0$ 和 t_n, $t_n\to\beta$, 而点 $(t_n,\varphi(t_n))$ 与 Γ 的距离大于 ε_0. 由于点列 $(t_n,\varphi(t_n))$ 是有界的, 必存在收敛子列, 仍记该收敛子列为 $(t_n,\varphi(t_n))$, 并设它的极限点为 (β,c), (β,c) 与 Γ 的距离不小于 ε_0, 所以 (β,c) 是 D 的内点. 根据引理 3, 解 $x=\varphi(t)$ 的存在区间可以向 β 的右方延展, 这与开区间 $\alpha<t<\beta$ 是解的最大存在区间矛盾. 因此, 当 $t\to\beta-0$ 时点 $(t,\varphi(t))$ 与 Γ 的距离趋于 0.

同样可讨论 $t\to\alpha+0$ 时的情形.

系　设 D 是无界区域, $f(t,x)$ 在 D 内是连续的, 在 D 的任一有界闭子域上关于 x 满足李普希兹条件. 如果解 $x=\varphi(t)$ 的最大存在区间是 $\alpha<t<\beta$, 那末下述情况必有一成立:

1°　$\beta=+\infty$;

2°　$\beta<+\infty$, 当 $t\to\beta-0$ 时 $\varphi(t)$ 无界;

3°　$\beta<+\infty$, 当 $t\to\beta-0$ 时, 点 $(t,\varphi(t))$ 与 D 的边界 Γ 的距离趋于 0.

同样可以讨论左端点 α 的情形.

证 若 $\beta=+\infty$，我们不必讨论了.

若 $\beta<+\infty$，$\varphi(t)$ 或者无界，或者有界. 若 $\varphi(t)$ 无界，已属情况 2°.

若 $\beta<+\infty$，$\varphi(t)$ 有界，例如 $|\varphi(t)|\leqslant K$. 圆 $t^2+x^2<(2K)^2+\beta^2$ 与 D 的公共集 Ω 是一个有界开集，取其中含有 $\varphi(t)$ 的分支. 根据定理 3，当 $t\to\beta-0$ 时 $(t,\varphi(t))$ 与 Ω 的边界的距离趋于 0，由于 $(t,\varphi(t))$ 与圆周 $t^2+x^2=(2K)^2+\beta^2$ 的距离大于一正的数，所以只能 $(t,\varphi(t))$ 与 Γ 的距离趋于 0.

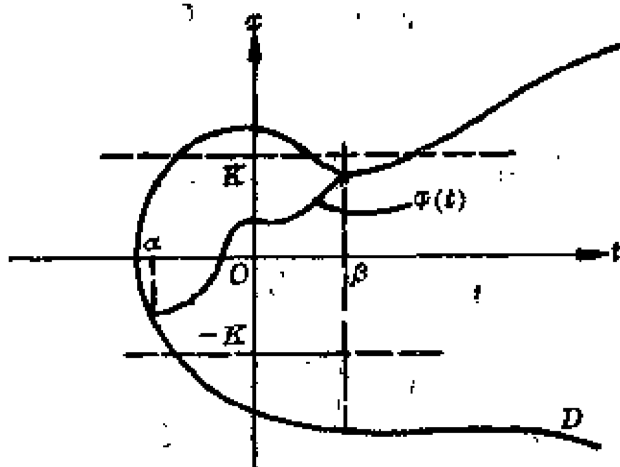


图 4.3

[例 3] 在区域 $x<1$ 内讨论微分方程

$$\frac{dx}{dt}=x^2$$

解的最大存在区间.

解 $x=0$ 是它的一个解，其最大存在区间为 $-\infty<t<+\infty$；如果 $x_0<0$，方程满足 $x(0)=x_0$ 的解是

$$x=\frac{x_0}{1-x_0t},$$

它的最大存在区间为 $\frac{1}{x_0}<t<+\infty$，且当 $t\to\frac{1}{x_0}+0$ 时 $x(t)$ 无界.

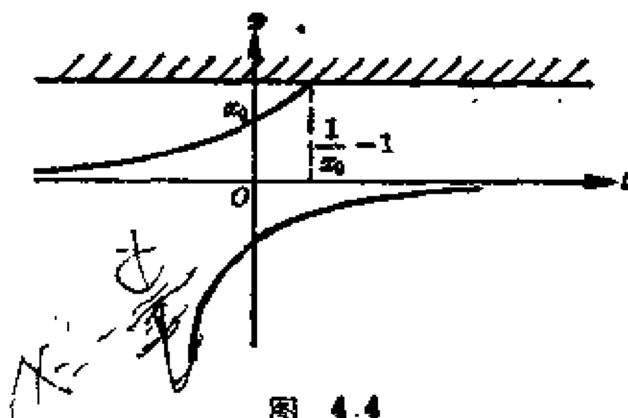


图 4.4

如果 $0<x_0<1$，解的最大存在区间为 $-\infty<t<\frac{1}{x_0}-1$，而当 $t\to\frac{1}{x_0}-1$ 时，$x(t)$ 趋于 1，即点 $(t,x(t))$ 与边界 $x=1$ 的距离趋于 0.

它说明系中的三种情况都可能出现.

[例 4] 设函数 $g(x)$ 在区间 $a<x<b$ 内是连续可微的，并且

$g(x)\neq 0$，而 $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=\lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0$，试讨论微分方程

$$\frac{dx}{dt}=g(x) \tag{23}$$

的解 $x=\varphi(t)$ 的性状.

解　不妨设 $g(a)=g(b)=0$，$g(x)>0\,(a<x<b)$，这时函数 $g(x)$ 在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是连续的.

设解 $x=\varphi(t)$ 的最大存在区间是 $\alpha<t<\beta$，$\varphi(0)=x_0$ 是开区间 $a<x<b$ 内的点. 当 $\alpha<t<\beta$ 时

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=g(\varphi(t))>0, \tag{24}$$

所以 $\varphi(t)$ 是单调增加的，由于 $\varphi(t)$ 的值位于 a 和 b 之间，所以极限

$$\gamma=\lim_{t\to\alpha+0}\varphi(t),\quad \delta=\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t)$$

是存在的，并且是有限的.

如果 $\beta<+\infty$，那末 $\delta=b$. 事实上，如果 $\delta<b$，那末点 $(\beta,\varphi(\beta-0))$ 位于方程的定义域中，从而由引理 2，解 $\varphi(t)$ 可以向 β 的右方延展，它与 (α,β) 是最大存在区间矛盾. 因此，$\delta=b$.

如果 $\beta=+\infty$，我们仍要证明 $\delta=b$. 事实上，如果 $\delta<b$，那末当 $0\leqslant t<+\infty$ 时，$x_0\leqslant\varphi(t)\leqslant\delta<b$，函数 $g(x)$ 在闭区间 $x_0\leqslant x\leqslant\delta$ 上的最小值 $m>0$；从而当 $0\leqslant t<+\infty$ 时，

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}\geqslant m>0,$$

由此得
$$\varphi(t)\geqslant x_0+mt,$$
从而
$$\delta=\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty,$$
它与 $\delta<b$ 相矛盾. 因此，$\delta=b$.

同样，可证

$$\lim_{t\to\alpha+0}\varphi(t)=a.$$

由 (24) 得，当 $\alpha<t<\beta$ 时，

$$\frac{1}{g(\varphi(t))}\frac{d\varphi(t)}{dt}=1.$$

两边从 $t=0$ 到 t 积分得

$$\int_0^t \frac{1}{g(\varphi(s))} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds = t.$$

从而

$$\int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{1}{g(x)} dx = t.$$

在上式中令 $t \to \beta - 0$，得

$$\int_{x_0}^{b-0} \frac{dx}{g(x)} = \beta.$$

所以，如果积分

$$\int_{x_0}^{b-0} \frac{dx}{g(x)}$$

是发散的，那末 $\beta = +\infty$；如果它是收敛的，那末 $\beta < +\infty$. 同样，如果积分

$$\int_{a+0}^{x_0} \frac{dx}{g(x)}$$

是发散的，那末 $\alpha = -\infty$，否则 $\alpha > -\infty$.

总之，设解 $x=\varphi(t)$ 的最大区间为 $\alpha<t<\beta$，那末当 $g(x)>0$ 时，

$$\lim_{t\to\alpha+0} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t\to\beta-0} \varphi(t) = b,$$

并且

$$\alpha = -\int_{a+0}^{x_0} \frac{dx}{g(x)}, \quad \beta = \int_{x_0}^{b-0} \frac{dx}{g(x)}.$$

习　题

1. 设 $p(t)$、$q(t)$ 和 $r(t)$ 都是区间 $\alpha<t<\beta$ 内的连续函数，验证下列方程满足初值问题的解存在唯一：

1) 线性方程 $\frac{dx}{dt}+p(t)x=q(t)$；

2) 黎卡提方程 $\frac{dx}{dt}=p(t)x^2+q(t)x+r(t)$.

2. 分别求出方程

$$\frac{dx}{dt} = |tx|$$

以 $(0, 0)$ 及 $(3, 0)$ 为初值的解.

3. 求出方程

$$\frac{dx}{dt}=(\ln x)\cdot(\ln t)$$

以(2, 1)为初值的解.

4．试求微分方程

$$\frac{dx}{dt}=t-x^2$$

满足初值条件 $x(0)=0$ 的解 $x=\varphi(t)$的近似解 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, 并且估计 $\varphi(t)-\varphi_3(t)$ 在 $t=\frac{1}{2}$ 及 $t=1$ 时的误差.

5．利用逐次逼近法求方程

$$\frac{dx}{dt}=x^2-t^2$$

适合初值条件 $x(0)=1$ 的近似解 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$. 并估计第二次近似解与真解在 $t=\frac{1}{4}$ 处的误差.

6．求解积分方程

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}\{P(s)\varphi(s)+Q(s)\varphi^2(s)\}ds,$$

其中 $P(t)$和 $Q(t)$在区间 $a<t<b$ 内是连续的.

7．利用逐次逼近法求解下列初值问题:

1) $\frac{dx}{dt}=\ln|\sin x|$, $x(1)=\frac{\pi}{2}$;

*2) $\frac{dx}{dt}=p(t)x$, $x(0)=x_0$, 其中 $p(t)$ 在区间 $\alpha<t<\beta$ 内是连续的, $\alpha<0<\beta$.

8．设 $f(t,x)$在整个平面上是连续有界的, 且 $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ 也是连续的, 试证微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

的每一解 $x=\varphi(t)$的最大存在区间是 $-\infty<t<+\infty$.

9．设 $f(t,x)$ 和 $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ 在 $\alpha<t<\beta$, $-\infty<x<+\infty$ 内是连续的, 并且对于任何$[a,b]\subset(\alpha,\beta)$, 存在 $N>0$ 使得

$$\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|\leqslant N\quad(a\leqslant t\leqslant b,\ -\infty<x<+\infty),$$

试证微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

的每一解的最大存在区间是 $\alpha<t<\beta$.

10. 验证 $x(t)\equiv 0$ 和 $x(t)=t^{3/2}(t\geq 0)$ 都是微分方程

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}x^{1/3}$$

的解，并讨论该方程在怎样的区域内适合定理 2 的条件.

*11. 设 $u(t)$ 和 $v(t)$ 是闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数，并且当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时

$$0\leqslant v(t),$$

$$u(t)\leqslant u_0+\int_a^t u(s)v(s)ds,$$

利用逐次逼近法证明

$$u(t)\leqslant u_0\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right).$$

*12. 设函数 $g(x)$ 连续，当 $x\neq x_0$ 时 $\dfrac{dg(x)}{dx}$ 存在，并且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{dg}{dx}=\infty,$$

试证：在含有 x_0 的任一闭区间上 $g(x)$ 不满足李普希兹条件.

13. 对微分方程

$$\frac{dx}{dt}=\begin{cases}x\ln x, & 当\ x>0\ 时,\\ 0, & 当\ x=0\ 时,\end{cases}$$

讨论是否满足初值问题解的存在唯一性定理的条件？求解该方程并确定解的唯一性是否成立？

14. 设 $f(t,x)$ 和 $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ 在全平面上是连续的，并且

$$|f(t,x)|\leqslant A+B|x|,$$

其中 $A>0$, $B>0$ 是常数，试证微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

的解 $x=\varphi(t)$ 的最大存在区间是 $-\infty<t<+\infty$.

§2 压缩映象原理

前面，我们两次用逐次逼近法证明微分方程解的存在唯一性定理，在证明过程中，有些步骤是类似的. 为了避免不必要的重复，我们来讨论它的抽象形式，即压缩映象原理.

定理 1(压缩映象原理) 设 Ω 是在闭区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上有定

义的函数 φ 的某一函数族，满足下列条件：

1° 对于 $\varphi\in\Omega$，存在常数 $M_\varphi>0$ 使得当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时

$$|\varphi(t)|\leqslant M_\varphi;$$

2° 如果 $\varphi_k\in\Omega(k=1, 2, \cdots)$ 并且 $\varphi_k(t)$ 在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上一致收敛于 $\varphi^*(t)$，那末 $\varphi^*\in\Omega$；

3° 对于 $\varphi\in\Omega$，存在 $A(\varphi)\in\Omega$ 与之对应，即 A 是把 Ω 中的函数变为 Ω 中的函数的变换；

4° 存在小于 1 的正常数 θ，$0<\theta<1$，使得当 $\varphi_1, \varphi_2\in\Omega$ 时

$$\|A(\varphi_1)-A(\varphi_2)\|\leqslant\theta\|\varphi_1-\varphi_2\|, \tag{1}$$

这里 $\|\varphi\|=\sup\limits_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\varphi(t)|$.

那末存在唯一的 $\varphi^*\in\Omega$ 满足

$$A(\varphi^*)=\varphi^*. \tag{2}$$

证 任取 $\varphi_0\in\Omega$，逐次定义

$$\varphi_1=A(\varphi_0),\ \varphi_2=A(\varphi_1),\ \cdots,\ \varphi_{k+1}=A(\varphi_k),\ \cdots$$

由于性质 3°，$\varphi_k\in\Omega(k=1, 2, \cdots)$.

其次，

$$\begin{aligned}
\varphi_2-\varphi_1&=A(\varphi_1)-A(\varphi_0),\\
\varphi_3-\varphi_2&=A(\varphi_2)-A(\varphi_1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_{k+1}-\varphi_k&=A(\varphi_k)-A(\varphi_{k-1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

根据不等式(1)得到

$$\|\varphi_2-\varphi_1\|=\|A(\varphi_1)-A(\varphi_0)\|\leqslant\theta\|\varphi_1-\varphi_0\|,$$

$$\|\varphi_3-\varphi_2\|=\|A(\varphi_2)-A(\varphi_1)\|\leqslant\theta\|\varphi_2-\varphi_1\|\leqslant\theta^2\|\varphi_1-\varphi_0\|,$$

一般地得到 $\|\varphi_{k+1}-\varphi_k\|\leqslant\theta^k\|\varphi_1-\varphi_0\|\quad(k=0, 1, 2, \cdots)$.

但 $0<\theta<1$，所以级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k\|\varphi_1-\varphi_0\|=\frac{1}{1-\theta}\|\varphi_1-\varphi_0\|$$

是收敛的，因此级数

$$\varphi_0(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\{\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)\}$$

在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上是一致收敛的，设它的和为 $\varphi^*(t)$，即 $\varphi_k(t)$ 在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上一致收敛于 $\varphi^*(t)$，根据性质 2°，$\varphi^*\in\Omega$.

由不等式

$$\|A(\varphi^*)-A(\varphi_k)\|\leqslant\theta\|\varphi^*-\varphi_k\|$$

推知 $A(\varphi_k)$ 在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上一致收敛于 $A(\varphi^*)$，在等式

$$\varphi_{k+1}=A(\varphi_k),$$

令 $k\to+\infty$ 就得

$$\varphi^*=A(\varphi^*).$$

因此存在 $\varphi^*\in\Omega$ 满足(2).

再证唯一性. 如果 $\tilde{\varphi}$ 是 Ω 中的另一函数满足

$$\tilde{\varphi}=A(\tilde{\varphi}),$$

那末由

$$\varphi^*-\tilde{\varphi}=A(\varphi^*)-A(\tilde{\varphi})$$

应用不等式(1)得

$$\|\varphi^*-\tilde{\varphi}\|\leqslant\theta\|\varphi^*-\tilde{\varphi}\|.$$

从而 $\|\varphi^*-\tilde{\varphi}\|=0$，即 $\tilde{\varphi}=\varphi^*$.

[例 1] 试用压缩映象原理讨论积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\ x(s))ds$$

的解的存在唯一性，这里 $f(t,x)$ 满足 §1 的定理 1 的条件，即 $f(t,x)$ 在 $|t-t_0|\leqslant a$, $|x-x_0|\leqslant b$ 上连续，且关于 x 满足李普希兹条件

$$|f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)|\leqslant N|x_1-x_2|.$$

解 设 $|f(t,x)|$ 的最大值为 M，$h=\min\left(a,\ \dfrac{b}{M}\right)$.

如果 θ 是常数满足 $0<\theta<1$，置 $h_1=\min\left(h,\ \dfrac{\theta}{N}\right)$.

设 Ω 是闭区间 $t_0-h_1\leqslant t\leqslant t_0+h_1$ 上的连续函数 $\varphi(t)$ 的全体，并且当 $\varphi\in\Omega$ 时，

$$|\varphi(t)-x_0|\leqslant b. \qquad\cdots\cdots(3)$$

显然，Ω 具有性质 1° 和 2°.

对于 $\varphi\in\Omega$，定义 $A(\varphi)=\psi$ 如下：

$$\psi(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi(s))ds. \tag{4}$$

由于当 $\varphi\in\Omega$ 时，不等式(3)成立，所以 $f(t,\ \varphi(t))$ 在 $|t-t_0|\leqslant h_1$ 上是连续的，从而 $\psi(t)$ 在 $|t-t_0|\leqslant h_1$ 上是连续的，并且

$$|\psi(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))ds\right|\leqslant M|t-t_0|,$$

所以
$$|\psi(t)-x_0|\leqslant Mh_1\leqslant Mh\leqslant b,$$

即 $\psi\in\Omega$. 所以由(4)定义的 A 具有性质 3°.

下面证明它具有性质 4°. 设 $\varphi_1,\ \varphi_2\in\Omega$，且

$$\psi_1(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi_1(s))ds,$$

$$\psi_2(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi_2(s))ds,$$

所以

$$\begin{aligned}|\psi_1(t)-\psi_2(t)|&=\left|\int_{t_0}^{t}\{f(s,\ \varphi_1(s))-f(s,\ \varphi_2(s))\}ds\right|\\&\leqslant N\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|ds\right|.\end{aligned} \tag{5}$$

但 $|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|\leqslant\|\varphi_1-\varphi_2\|$，所以

$$|\psi_1(t)-\psi_2(t)|\leqslant N|t-t_0|\cdot\|\varphi_1-\varphi_2\|\leqslant Nh_1\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

由此得

$$\|A(\varphi_1)-A(\varphi_2)\|=\|\psi_1-\psi_2\|\leqslant\theta\|\varphi_1-\varphi_2\|. \tag{6}$$

即不等式(1)成立. 根据压缩映象原理，存在唯一的 $\varphi^*(t)$ 在 $|t-t_0|\leqslant h_1$ 上连续，满足

$$|\varphi^*(t)-x_0|\leqslant b$$

及
$$\varphi^*(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi^*(s))ds.$$

从上面的分析看出，为了证明由(4)决定的变换 A 满足压缩映象原理的条件，我们只得在更小的区间 $|t-t_0|\leqslant h_1$ 上讨论. 能否把区间扩大到 $|t-t_0|\leqslant h$ 呢？我们知道应用逐次逼近法时的区间是 $|t-t_0|\leqslant h$，这样压缩映象原理还没有完全包括逐次逼近法. 为使它能完全包括逐次逼近法，我们把定理 1 中不等式(1)的 $\|\varphi\|$

的定义改述如下：

$$\|\varphi\|=\max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}\{e^{-N|t-t_0|}|\varphi(t)|\},$$

这里 $N>0$ 是一常数，t_0 是 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的一给定点．这时，定理 1 的结论仍成立．

事实上，由 $\sum_{k=0}^{\infty}\|\varphi_{k+1}-\varphi_k\|\leqslant\frac{1}{1-\theta}\|\varphi_1-\varphi_0\|$ 推知级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-N|t-t_0|}|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)|$$

在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上一致收敛，但 $e^{-N|t-t_0|}\geqslant e^{-N(\beta-\alpha)}$，所以

$$e^{-N(\beta-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}[\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)]$$

在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上是一致收敛的，从而级数

$$\varphi_0(t)+\sum_{k=0}^{\infty}[\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)]$$

在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上是一致收敛的．然后，容易得证定理的结论．

现把上述推广用于例 1．设 Ω 是在闭区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上适合条件

$$|\varphi(t)-x_0|\leqslant b \tag{7}$$

的连续函数的全体．显然，它适合性质 1° 和 2°．又由(4)决定的 $A(\varphi)=\psi$ 对于在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上适合条件(7)的连续函数是有定义的，并且当 $|t-t_0|\leqslant h$ 时

$$|\psi(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))ds\right|\leqslant M|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b.$$

所以 $A(\varphi)\in\Omega$．还需证明不等式(1)成立．由于当 $|t-t_0|\leqslant h$ 时不等式(5)成立，所以

$$e^{-N|t-t_0|}|\psi_1(t)-\psi_2(t)|\leqslant N\left|\int_{t_0}^{t}e^{-N|t-t_0|}|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|ds\right|.$$

当 $t\geqslant s\geqslant t_0$ 时

$$\begin{aligned}e^{-N|t-t_0|}|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|&=e^{-N(t-s)}e^{-N(s-t_0)}|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|\\&\leqslant e^{-N(t-s)}\|\varphi_1-\varphi_2\|.\end{aligned}$$

所以

$$e^{-N|t-t_0|}|\psi_1(t)-\psi_2(t)|\leqslant\|\varphi_1-\varphi_2\|\int_{t_0}^{t}Ne^{-N(t-s)}ds$$
$$=(1-e^{-N(t-t_0)})\|\varphi_1-\varphi_2\|$$
$$\leqslant(1-e^{-N(\beta-\alpha)})\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

同样，当 $t\leqslant s\leqslant t_0$ 时

$$e^{-N|t-t_0|}|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|\leqslant e^{-N(s-t)}\|\varphi_1-\varphi_2\|,$$

从而

$$e^{-N|t-t_0|}|\psi_1(t)-\psi_2(t)|\leqslant\|\varphi_1-\varphi_2\|\int_{t}^{t_0}Ne^{-N(s-t)}ds$$
$$=(1-e^{-N(t_0-t)})\|\varphi_1-\varphi_2\|$$
$$\leqslant(1-e^{-N(\beta-\alpha)})\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

总之　　$$\|\psi_1-\psi_2\|\leqslant(1-e^{-N(\beta-\alpha)})\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

若取 $\theta=(1-e^{-N(\beta-\alpha)})$，那末 $0<\theta<1$. 所以 A 适合定理 1 的条件，从而得证积分方程在闭区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上存在唯一的连续解.

[例 2]　利用压缩映象原理证明隐函数存在定理. 设函数 $F(x, y)$ 和 $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ 在 $|x-x_0|\leqslant a$, $|y-y_0|\leqslant b$ 上是连续的，并且

$$F(x_0, y_0)=0,\ \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\neq0,\tag{8}$$

那末存在唯一的连续函数 $y(x)$ 适合

$$F(x, y(x))\equiv0,\ y(x_0)=y_0.$$

证　由于 $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ 的连续性及(8)，存在 $r>0$ 使得当

$$|x-x_0|\leqslant r,\ |y-y_0|\leqslant r$$

时　　$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\neq0.$$

不妨设存在常数 $m>0$, $M>0$ 使得当 $|x-x_0|\leqslant r$, $|y-y_0|\leqslant r$ 时

$$m\leqslant\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\leqslant M\quad\left(\text{或}-M\leqslant\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\leqslant-m\right)$$

由于(8)，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|\leqslant\delta$ 时

$$|F(x, y_0)| \leqslant mr.$$

取区间 $|x-x_0|\leqslant\delta$, Ω 是在 $|x-x_0|\leqslant\delta$ 上满足

$$\varphi(x_0)=y_0,\ |\varphi(x)-y_0|\leqslant r$$

的连续函数全体. 显然 Ω 适合定理 1 中的性质 1° 和 2°.

对于 $\varphi\in\Omega$, 置 $A(\varphi)=\psi$, 其中

$$\psi(x)\equiv\varphi(x)-\frac{1}{M}F(x, \varphi(x))$$

$$\left(\text{或}\quad \psi(x)\equiv\varphi(x)+\frac{1}{M}F(x, \varphi(x))\right).$$

那末

$$\psi(x_0)=\varphi(x_0)-\frac{1}{M}F(x_0, \varphi(x_0))=y_0,$$

$$\begin{aligned}|\psi(x)-y_0|&\equiv\left|\varphi(x)-y_0-\frac{1}{M}F(x, \varphi(x))\right|\\&\leqslant\left|\varphi(x)-y_0-\frac{1}{M}\{F(x, \varphi(x))-F(x, y_0)\}\right|\\&\quad+\frac{1}{M}|F(x, y_0)|.\end{aligned}\tag{9}$$

但

$$F(x, \varphi(x))-F(x, y_0)=\frac{\partial F(x, y_0+\theta(x)(\varphi(x)-y_0))}{\partial y}(\varphi(x)-y_0),$$

所以

$$\begin{aligned}&\left|\varphi(x)-y_0-\frac{1}{M}\{F(x, \varphi(x))-F(x, y_0)\}\right|\\&=|\varphi(x)-y_0|\cdot\left|1-\frac{1}{M}\frac{\partial F(x, y_0+\theta(x)(\varphi(x)-y_0))}{\partial y}\right|\\&\leqslant|\varphi(x)-y_0|\left(1-\frac{m}{M}\right).\end{aligned}$$

由上式及(9)式得

$$\begin{aligned}|\psi(x)-y_0|&\leqslant|\varphi(x)-y_0|\left(1-\frac{m}{M}\right)+\frac{m}{M}r\\&\leqslant r\left(1-\frac{m}{M}\right)+\frac{m}{M}r=r,\end{aligned}$$

所以 $\psi\in\Omega$, 即 $A(\varphi)\in\Omega$.

若 $\psi_1=A(\varphi_1)$, $\psi_2=A(\varphi_2)$, 那末

$$
\begin{aligned}
&|\psi_1(x)-\psi_2(x)|\\
&=\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)-\frac{1}{M}\{F(x,\varphi_1(x))-F(x,\varphi_2(x))\}\right|\\
&=|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\left|1-\frac{1}{M}\frac{\partial F(x,\varphi_2(x)+\theta(x)(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))}{\partial y}\right|\\
&\leqslant\left(1-\frac{m}{M}\right)|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|,
\end{aligned}
$$

所以
$$\|A(\varphi_1)-A(\varphi_2)\|\leqslant\left(1-\frac{m}{M}\right)\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

因此,定理1的条件成立．从而隐函数存在定理得证．

习　题

1．利用压缩映象原理证明,当 $|\lambda|$ 充分小时,积分方程

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds$$

存在唯一的解,这里 $K(t,s)$ 在 $a\leqslant t,s\leqslant b$ 上是连续的．

2．当 $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}<0$ 时,证明隐函数存在定理．

3．利用压缩映象原理讨论线性代数方程组

$$Ax=b$$

有唯一解的条件．

§3　方程组解的存在、唯一性定理

对于标准的一阶微分方程组

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1,\cdots,x_n),\\
&\frac{dx_2}{dt}=f_2(t,x_1,\cdots,x_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dx_n}{dt}=f_n(t,x_1,\cdots,x_n),
\end{aligned}
$$

假设函数 $f_j(t,x_1,\cdots,x_n)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 在 $n+1$ 维空间的区

域 D 内是变量 $t, x_1, \cdots, x_n$ 的连续函数，$(t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$是 D 内的给定点。初值问题是：求微分方程组的解 $x_j=\varphi_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$满足初值条件

$$\varphi_j(t_0)=x_j^0 \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

若引用向量记号：

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ f_2(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix},$$

那末方程组(1)可写为向量形式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \tag{1}$$

而初值条件可写为

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}^0. \tag{2}$$

方程组(1)的初值问题解的存在唯一性定理，与§1对于一阶方程的情形类似，证明也基本一样。

定理1 对于微分方程组(1)，假设

1° $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$在 D 内是 $t, \boldsymbol{x}$ 的连续函数；

2° 对于 D 的任一有界闭子域 $\overline{D}_1$，存在常数 $N>0$ 使得当 $(t, \boldsymbol{x}_1)$、$(t, \boldsymbol{x}_2)$属于 $\overline{D}_1$ 时满足李普希兹条件：

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)\|\leqslant N\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|. \tag{3}$$

那末，对于$(t_0, \boldsymbol{x}^0)\in D$，微分方程组(1)存在唯一的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)(\alpha<t<\beta)$满足初值条件

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{x}^0.$$

它可以用压缩映象原理来证明。

首先，取 $a>0, b>0$ 使得

$$\overline{R}: |t-t_0|\leqslant a, \quad \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\|\leqslant b$$

位在 D 的内部，置 $M=\max\limits_{\overline{R}}\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\|$，$h=\min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$，在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上讨论满足条件

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{x}^0\|\leqslant b$$

的连续的向量值函数的全体 Ω.

再设 $f(t, x)$在 $\bar{R}$ 上关于 x 满足李普希兹条件(3)，置

$$\|\varphi\| = \max_{|t-t_0|\leq h} \{e^{-N|t-t_0|}\|\varphi(t)\|\}.$$

并设 $A(\varphi)\equiv\psi$，而

$$\psi(t)\equiv x^0+\int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))ds,$$

那末 $\psi\in\Omega$，即 $A(\varphi)\in\Omega$，且和 § 2 一样可以证明

$$\|A(\varphi_1)-A(\varphi_2)\|\leqslant(1-e^{-Nh})\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

因此，根据压缩映象原理，存在唯一的 $\varphi^*\in\Omega$ 使得

$$\varphi^*(t)\equiv x^0+\int_{t_0}^t f(s, \varphi^*(s))ds.$$

从而得证定理.

对于 n 阶微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}=f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \tag{4}$$

初值问题是：求它的解 $x=\varphi(t)$ $(\alpha<t<\beta)$ 满足初值条件

$$\varphi(t_0)=x_0,\ \dot{\varphi}(t_0)=\dot{x}_0,\ \cdots,\ \varphi^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}, \tag{5}$$

这里$(t_0, x_0, \dot{x}_0, \cdots, x_0^{(n-1)})$是给定的.

定理 2　对于 n 阶微分方程(4)，假设

1° $f(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n-1)})$在 $n+1$ 维空间的区域 D 内是变量 $t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n-1)}$ 的连续函数；

2° 对于 D 的任一有界闭子域 $\bar{D}_1$，存在常数 $N>0$，使得不等式

$$\begin{aligned}&|f(t, x_1, \dot{x}_1, \cdots, x_1^{(n-1)})-f(t, x_2, \dot{x}_2, \cdots, x_2^{(n-1)})|\\&\leqslant N\{|x_1-x_2|^2+|\dot{x}_1-\dot{x}_2|^2+\cdots+|x_1^{(n-1)}-x_2^{(n-1)}|^2\}^{1/2}\end{aligned}$$

对于 $\bar{D}_1$ 上的任意两点 $(t, x_1, \cdots, x_1^{(n-1)})$ 和 $(t, x_2, \cdots, x_2^{(n-1)})$ 成立. 那末存在唯一的 n 阶可微函数 $x=\varphi(t)$ $(\alpha<t<\beta)$，它在 $\alpha<t<\beta$ 内满足方程(4)及初值条件(5).

这只要把 n 阶微分方程化为一阶微分方程组(1)，并利用定理 1 就得证该定理.

习 题

1. 叙述并应用压缩映象原理证明：二阶微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$$

的初值问题解的存在唯一性定理.

2. 试用逐次逼近法求出微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=x-y,$$

$$\frac{dy}{dt}=tx$$

满足初值条件 $x(0)=1$, $y(0)=0$ 的解的第二次近似 $x_2(t), y_2(t)$, 并在 $|t|\leqslant 0.1$ 上估计误差.

3. 设 $x=\varphi_n(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是二阶微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(t,\ x)$$

的解, $\varphi_n(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上一致收敛于 $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}_n(t_0)$ 收敛 $(a\leqslant t_0\leqslant b)$. 试证: $\varphi(t)$ 也是二阶微分方程的解. 这里假设 $f(t,\ x)$ 是连续函数.

§4 解对初值和参数的连续性定理

微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x) \tag{1}$$

满足初值条件

$$x(t_0)=x_0 \tag{2}$$

的解, 因初值 $(t_0,\ x_0)$ 的变化而变化. 记它的依赖关系为

$$x=\varphi(t;\ t_0,\ x_0),$$

即在某一开区间 $\alpha<t<\beta$ 内, 它是 t 的连续可微函数, 满足

$$\frac{d\varphi(t;\ t_0,\ x_0)}{dt}\equiv f(t,\ \varphi(t;\ t_0,\ x_0)),$$

和

$$\varphi(t_0;\ t_0,\ x_0)=x_0.$$

自然 α 和 β 可能依赖于 $t_0,\ x_0$.

本节要讨论 φ 是否是 (t_0, x_0) 的连续函数？这问题是有重要的理论和实际价值的，因为初值 t_0, x_0 是实验测定的，自然会有误差．如果初值的微小变化引起解的大变化，那末所求得的解就没有多大价值了．因此，我们有必要讨论这一问题．

微分方程

$$\frac{dx}{dt}=1+x^2 \tag{3}$$

满足初值条件(2)的解 $\varphi(t; t_0, x_0)$ 是

$$x=\operatorname{tg}(t-t_0+\operatorname{arc}\operatorname{tg} x_0). \tag{4}$$

由(4)看出，方程(3)的解是初值 t_0, x_0 的连续函数．但是，当 $t_0=0$ 时它为

$$x=\operatorname{tg}(t+\operatorname{arc}\operatorname{tg} x_0),$$

它的存在区间为 $-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\operatorname{tg} x_0<t<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\operatorname{tg} x_0$，因 x_0 的不同而不同．

假设函数 $f(t, x)$ 在区域 D 内是连续的，在 D 的任一有界闭子域上关于 x 满足李普希兹条件，那末当 $(t_0, x_0)\in D$ 时，方程(1)满足初值条件的解 $x=\varphi(t; t_0, x_0)$ 存在且唯一．我们在§1中是利用逐次逼近法证明的，即设

$$\varphi_0(t; t_0, x_0)\equiv x_0,$$

$$\varphi_1(t; t_0, x_0)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_0(s; t_0, x_0))\,ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{k+1}(t; t_0, x_0)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_k(s; t_0, x_0))\,ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

并证明 $\varphi_k(t; t_0, x_0)$ 在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上一致收敛于 $\varphi(t; t_0, x_0)$．容易看出，$\varphi_k(t; t_0, x_0)$ 是 t; t_0, x_0 的连续函数，如果上述一致性不仅是关于 t 而且是关于 t_0, x_0 的，那末 $\varphi(t; t_0, x_0)$ 是三个变量的连续函数．

但是，上面没有说清楚 (t, t_0, x_0) 的变化范围，也没有说清楚

上述极限过程的一致性．下面的定理回答了这些问题．

定理1 假设 $f(t, x)$ 在区域 D 内是连续的，在 D 的任一有界闭子域上关于 x 满足李普希兹条件；又设 $x=\psi(t)$ 在闭区间 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上是微分方程(1)的解．那末，存在 $\eta>0$，使得当 $r_1\leqslant t_0\leqslant r_2$，$|x_0-\psi(t_0)|\leqslant\eta$ 时，微分方程(1)以 (t_0, x_0) 为初值的解 $x=\varphi(t; t_0, x_0)$ 在闭区间 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上存在．并且关于 t, t_0, x_0 是闭域

$$U: r_1\leqslant t\leqslant r_2,\ r_1\leqslant t_0\leqslant r_2,\ |x_0-\psi(t_0)|\leqslant\eta$$

上的连续函数．

证 我们主要应设法选取 η，使得逐次逼近序列在 U 上一致收敛．为此，我们应用压缩映象原理．

由于当 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 时，$x=\psi(t)$ 是方程的解，所以积分曲线完全含在 D 内，从而存在 $\eta_1>0$，使得闭域

$$Q: r_1\leqslant t\leqslant r_2,\ |x-\psi(t)|\leqslant\eta_1$$

完全含在 D 内．由于 $f(t, x)$ 在 Q 上关于 x 满足李普希兹条件，所以存在 $N>0$，使得不等式

$$|f(t, x_1)-f(t, x_2)|\leqslant N|x_1-x_2|$$

对任何 $(t, x_1)\in Q$，$(t, x_2)\in Q$ 成立．

取 $\eta=\eta_1 e^{-N(r_2-r_1)}$．设函数族 Ω 是在闭区间 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上满足下述条件的连续函数全体，当 $\varphi\in\Omega$ 时

$$\|\varphi-\psi\|=\max_{r_1\leqslant t\leqslant r_2}\{e^{-N|t-t_0|}|\varphi(t)-\psi(t)|\}\leqslant\eta.$$

显然这时

$$|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant\eta e^{N|t-t_0|}\leqslant\eta e^{N(r_2-r_1)}=\eta_1 \tag{5}$$

从而 $\varphi(t)$ 位于 Q 上．

设 $A(\varphi)=\chi$，而

$$\chi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s, \varphi(s))ds, \tag{6}$$

显然，当 $\varphi\in\Omega$ 时，$f(t, \varphi(t))$ 是 t 的连续函数，所以 $\chi(t)$ 在 $r_1\leqslant t$

$\leqslant r_2$ 上是连续的. 又因 $\psi(t)$ 是(1)的解, 所以

$$\psi(t)\equiv\psi(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(s,\ \psi(s))ds.$$

上式减去(6)式得

$$|\psi(t)-\chi(t)|\leqslant|\psi(t_0)-x_0|$$
$$+\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,\ \psi(s))-f(s,\ \varphi(s))]ds\right|.$$

由于 $|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant\eta_1$, 所以

$$|f(s,\ \psi(s))-f(s,\ \varphi(s))|\leqslant N|\psi(s)-\varphi(s)|,$$

从而当 $(t;\ t_0,\ x_0)\in U$ 时

$$|\psi(t)-\chi(t)|\leqslant\eta+\left|\int_{t_0}^{t}N|\psi(s)-\varphi(s)|ds\right|.$$

根据不等式(5)得

$$|\psi(t)-\chi(t)|\leqslant\eta+\left|\int_{t_0}^{t}\eta Ne^{N|s-t_0|}ds\right|$$
$$=\eta+\eta(e^{N|t-t_0|}-1)=\eta e^{N|t-t_0|},$$

即
$$e^{-N|t-t_0|}|\psi(t)-\chi(t)|\leqslant\eta,$$

这样, 当 $\varphi\in\Omega$ 时, $A(\varphi)\in\Omega$.

如果 $\varphi^1,\ \varphi^2\in\Omega$, 且 $\chi_1=A(\varphi^1),\ \chi_2=A(\varphi^2)$, 那末

$$|\chi_1(t)-\chi_2(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}\{f(s,\ \varphi^1(s))-f(s,\ \varphi^2(s))\}ds\right|$$
$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}N|\varphi^1(s)-\varphi^2(s)|ds\right|.$$

与§2一样, 可以证明

$$e^{-N|t-t_0|}|\chi_1(t)-\chi_2(t)|\leqslant(1-e^{-N(r_2-r_1)})\|\varphi^1-\varphi^2\|,$$

从而

$$\|\chi_1-\chi_2\|=\|A(\varphi^1)-A(\varphi^2)\|\leqslant(1-e^{-N(r_2-r_1)})\|\varphi^1-\varphi^2\|.$$

因此, Ω 和 A 满足压缩映象原理的全部条件. 如果取 $\varphi_0(t;\ t_0,\ x_0)\equiv\psi(t)$, 那末逐次逼近序列

$$\varphi_1(t;t_0,x_0)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_0(s;t_0,x_0))ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{7}$$

$$\varphi_{k+1}(t;t_0,x_0)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_k(s;t_0,x_0))ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

对于$(t;t_0,x_0)\in U$是有定义的，并且$\varphi_k(t;t_0,x_0)$是$(t;t_0,x_0)$的连续函数，当$k\to+\infty$时它在U上一致收敛，它的极限$\varphi(t;t_0,x_0)$在U上是连续的，并且

$$\varphi(t;t_0,x_0)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s;t_0,x_0))ds,$$

即$\varphi(t;t_0,x_0)$是微分方程(1)满足初值条件(2)的解．定理证毕．

微分方程被用来描述物理过程时，往往含有参数，例如，在积分电路的微分方程

$$RC\frac{dx}{dt}+x=u(t)$$

中，R、C是参数；又如单摆运动的微分方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

中，l是参数，g是常数．RC因电阻R和电容C的不同而变化，$\frac{g}{l}$因摆长l的不同而变化．我们知道，物理过程中的参数是由实验测定的，因而必有误差．因此，有必要讨论微分方程的解对参数的依赖关系．

一般地，我们讨论含参数μ的微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,\mu), \tag{8}$$

假设$f(t,x,\mu)$在区域G内是(t,x,μ)的连续函数，这时对于不同的μ，(8)对应于不同的方程．运用定理1的方法，可以证明

定理2 假设$f(t,x,\mu)$在区域G内是连续的，在G的任一有界闭子域上关于x满足李普希兹条件．又设$x=\varphi(t;\mu_0)$在$r_1\leqslant t\leqslant r_2$上是方程(8)当$\mu=\mu_0$时的解，以$(t_0,x_0)$为初值．那末存在

$\eta>0$ 使得当 $|\mu-\mu_0|<\eta$ 时方程 (8) 以 (t_0, x_0) 为初值的解 $x=\varphi(t;\mu)$ 在 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上存在，并且是 (t, μ) 的连续函数.

该定理的证明留给读者完成.

如果 $f(t, x, \mu)$ 关于 x, μ 满足李普希兹条件，那末可以讨论微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x, \mu),$$

$$\frac{d\mu}{dt}=0$$

满足初值条件

$$x(t_0)=x_0,\ \mu(t_0)=\mu_0$$

的解

$$x=\varphi(t;\mu_0),\ \mu=\mu_0.$$

从而得证定理 2.

习　题

1. 试求出下列方程以 (t_0, x_0) 为初值的解，并讨论解对初值的连续性：

1) $\dfrac{dx}{dt}=3x+e^t$;　　　　2) $\dfrac{dx}{dt}=3t^2e^x$.

2. 设 $x=\varphi_n(t)$ 是微分方程

$$\frac{dx}{dt}=1+x^2$$

以 $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ 为初值的解，试证：对于给定的 $\varepsilon>0$，存在 N 使得当 $n\geqslant N$ 时 $\varphi_n(t)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$ 上存在，且在此区间上成立着不等式

$$|\varphi_n(t)-\operatorname{tg} t|<\varepsilon.$$

3. 设 $x=\varphi_n(t)$ 是方程 $\dfrac{dx}{dt}=xe^{(t+x)^2}$ 的解，适合条件 $\varphi_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^2}$，试证对于任意给定的正数 ε 和实数 A、B，存在 N，使得当 $n\geqslant N$ 时 $\varphi_n(t)$ 在闭区间 $A\leqslant t\leqslant B$ 上存在，且在此区间上 $|\varphi_n(t)|<\varepsilon$.

4. 证明定理 2.

5. 求出方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\zeta\dfrac{dx}{dt}+x=0$ 的解的表达式，并由此讨论解对初值和参数 ζ 的连续性.

6．试求下列方程以(0, 0)为初值的解，并由此讨论解对参数 μ 的连续性：

1) $\frac{dx}{dt}=1-\mu x$;　　　　2) $\frac{dx}{dt}=(1+x)\sqrt{1-\mu^2t^2}$.

7．设 $u(t)$ 是闭区间 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上的连续函数，并且当 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 时成立着不等式

$$u(t)\leqslant\int_{t_0}^{t}(\alpha u(s)+\beta)ds,$$

其中 $\alpha>0$, $\beta>0$ 是常数，那末下面的不等式成立

$$u(t)\leqslant\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-t_0)}-1).$$

8．设 $u(t)$ 和 $v(t)$ 在闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是非负的连续函数，并且当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时

$$u(t)\leqslant\alpha+\beta\int_a^t u(s)v(s)ds,$$

其中 $\alpha>0$, $\beta>0$ 是常数，那末当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时

$$u(t)\leqslant\alpha e^{\beta\int_a^t v(s)ds},$$

9．设 $f(t)$, $g(t)$, $y(t)$ 是闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数，且当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时 $f(t)\geqslant 0$,

$$y(t)\leqslant g(t)+\int_a^t f(s)y(s)ds,$$

试证当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，

$$y(t)\leqslant g(t)+\int_a^t f(s)g(s)e^{\int_s^t f(\sigma)d\sigma}ds.$$

[提示：置 $R(t)=\int_a^t f(s)y(s)ds$，且证明 $\frac{dR}{dt}-fR\leqslant fg$.]

10．利用第7或8题的结果，证明方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x)$$

的初值问题解的唯一性定理.

*§5 解对初值或参数的可微性定理

对于微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \tag{1}$$

假设 $f(t, x)$ 和 $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ 在区域 D 内是连续的，那末方程(1)以 (t_0, x_0) 为初值的解

$$x=\varphi(t; t_0, x_0)$$

对 t_0、x_0 是否可微呢？这就是本节要讨论的问题．如果

$$z=\frac{\partial \varphi(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}$$

存在且连续，我们试看它应适合怎样的关系．这时，由关系式

$$\frac{d}{dt}\varphi(t; t_0, x_0)\equiv f(t, \varphi(t; t_0, x_0))$$

两端对 x_0 求导，并形式地交换导微顺序得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}\equiv\frac{\partial f(t, \varphi(t; t_0, x_0))}{\partial x}\frac{\partial \varphi(t; t_0, x_0)}{\partial x_0},$$

即

$$z=\frac{\partial \varphi(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}$$

适合线性微分方程

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f(t, \varphi(t; t_0, x_0))}{\partial x}z. \tag{2}$$

称(2)是微分方程(1)关于解 $x=\varphi(t; t_0, x_0)$ 的*变分方程*．因此，如果 $\frac{\partial \varphi(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}$ 存在，那末它应当是变分方程(2)的解，且由

$$\varphi(t_0; t_0, x_0)\equiv x_0$$

得

$$\left.\frac{\partial \varphi(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}\right|_{t=t_0}=1. \tag{3}$$

然而上述讨论是形式的，需要严格证明．

定理 1　对于微分方程(1)，假设 $f(t, x)$ 和 $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ 在区域 D 内是连续的，又设 $x=\psi(t)$ 在 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上是方程(1)的解，那末存在 $\eta>0$，使得当 (t_0, x_0) 满足

$$r_1\leqslant t_0\leqslant r_2,\ |x_0-\psi(t_0)|\leqslant\eta$$

时，解 $\varphi(t; t_0, x_0)$ 在 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上连续，它对 t_0 和 x_0 的偏导数

$$\frac{\partial \varphi(t; t_0, x_0)}{\partial t_0}\quad 和\quad \frac{\partial \varphi(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}$$

存在,并且满足变分方程(2)和初值条件

$$\left.\frac{\partial\varphi(t;t_0,x_0)}{\partial t_0}\right|_{t=t_0}=-f(t_0,x_0) \tag{4}$$

及(3).

证 根据§4的定理1,存在

$$U:\ r_1\leqslant t\leqslant r_2,\ r_1\leqslant t_0\leqslant r_2,\ |x_0-\psi(t_0)|\leqslant\eta,$$

使得解 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$ 是 U 上的连续函数,且是逐次逼近序列

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t;t_0,x_0)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\psi(s))ds,\\
&\varphi_2(t;t_0,x_0)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_1(s;t_0,x_0))ds,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_{k+1}(t;t_0,x_0)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_k(s;t_0,x_0))ds,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{5}$$

一致收敛的极限函数.

根据定理的条件和定积分关于参数的可微性定理,由(5)逐次得证:$\dfrac{\partial\varphi_k(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}$ 存在,并且当 $(t;t_0,x_0)\in U$ 时,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_1(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}\equiv 1,\\
&\frac{\partial\varphi_2(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}\\
&\quad\equiv 1+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f(s,\varphi_1(s;t_0,x_0))}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_1(s;t_0,x_0)}{\partial x_0}ds,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial\varphi_{k+1}(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}\\
&\quad\equiv 1+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f(s,\varphi_k(s;t_0,x_0))}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_k(s;t_0,x_0)}{\partial x_0}ds,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{6}$$

设 K 是 $\left|\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|$ 在 $r_1\leqslant t\leqslant r_2,\ |x-\psi(t)|\leqslant\eta$ 上的最大

值，那末当 $(t; t_0, x_0)\in U$ 时，

$$\left|\frac{\partial f(t, \varphi_k(t; t_0, x_0))}{\partial x}\right|\leqslant K \quad (k=1, 2, \cdots).$$

又设 $z(t)$ 是变分方程

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f(t, \varphi(t; t_0, x_0))}{\partial x}z$$

适合初值条件 $z(t_0)=1$ 的解，那末

$$z(t)\equiv 1+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f(s, \varphi(s; t_0, x_0))}{\partial x}z(s)ds \tag{7}$$

现在证明：当 $k\to+\infty$ 时 $\dfrac{\partial \varphi_k(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}$ 一致收敛于 $z(t)$. 由关系式(6)和(7)得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \varphi_{k+1}(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}-z(t)\\&=\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f(s, \varphi_k(s; t_0, x_0))}{\partial x}\left\{\frac{\partial \varphi_k(s; t_0, x_0)}{\partial x_0}-z(s)\right\}ds\\&\quad+\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial f(s, \varphi_k(s; t_0, x_0))}{\partial x}-\frac{\partial f(s, \varphi(s; t_0, x_0))}{\partial x}\right\}z(s)ds.\end{aligned} \tag{8}$$

记

$$\max_{(t; t_0, x_0)\in U}\left|\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial f(s, \varphi_k(s; t_0, x_0))}{\partial x}-\frac{\partial f(s, \varphi(s; t_0, x_0))}{\partial x}\right\}z(s)ds\right|$$

为 ε_k. 因为 $\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ 连续且 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(t; t_0, x_0)=\varphi(t; t_0, x_0)$ 在 U 上一致地成立，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$.

由(8)得到

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial \varphi_{k+1}(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}-z(t)\right|\\&\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}K\left|\frac{\partial \varphi_k(s; t_0, x_0)}{\partial x_0}-z(s)\right|ds\right|+\varepsilon_k.\end{aligned}$$

从而

$$e^{-K|t-t_0|}\left|\frac{\partial\varphi_{k+1}(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}-z(t)\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}Ke^{-K|t-s|}e^{-K|s-t_0|}\left|\frac{\partial\varphi_k(s;t_0,x_0)}{\partial x_0}-z(s)\right|ds\right|$$

$$+e^{-K|t-t_0|}\varepsilon_k.$$

若记
$$\|h\|=\max_{r_1\leqslant t\leqslant r_2}e^{-K|t-t_0|}|h(t)|,$$

那末

$$e^{-K|t-t_0|}\left|\frac{\partial\varphi_{k+1}(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}-z(t)\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}Ke^{-K|t-s|}\,ds\right|\left\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_0}-z\right\|+\varepsilon_k.$$

上式右端第一项等于

$$(1-e^{-K|t-t_0|})\left\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_0}-z\right\|\leqslant(1-e^{-K(r_2-r_1)})\left\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_0}-z\right\|,$$

所以
$$\left\|\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial x_0}-z\right\|\leqslant(1-e^{-K(r_2-r_1)})\left\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_0}-z\right\|+\varepsilon_k.$$

由上式得到

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\|\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial x_0}-z\right\|\leqslant(1-e^{-K(r_2-r_1)})\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_0}-z\right\|.$$

但是
$$1-e^{-K(r_2-r_1)}<1,$$

所以
$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_0}-z\right\|=0,$$

即当 $k\to+\infty$ 时 $\dfrac{\partial\varphi_k(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}$ 在 U 上一致地趋于 $z(t)$. 从而，根据函数序列逐项可微性定理得到

$$\frac{\partial\varphi(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}=\lim_{k\to\infty}\frac{\partial\varphi_k(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}=z(t).$$

即 $z=\dfrac{\partial\varphi(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}$ 适合变分方程(2)和初值条件(3).

关于 $\dfrac{\partial\varphi(t;t_0,x_0)}{\partial t_0}$ 的存在性，以及它适合变分方程(2)和初值条件(4)的证明，留给读者完成. 定理1证毕.

由于 $\dfrac{\partial\varphi(t;t_0,x_0)}{\partial t_0}$ 和 $\dfrac{\partial\varphi(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}$ 都是线性方程(2)的解，

并且它们的初值分别为$(t_0, -f(t_0, x_0))$和$(t_0, 1)$，所以

$$\frac{\partial\varphi(t; t_0, x_0)}{\partial t_0}+f(t_0, x_0)\frac{\partial\varphi(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}\equiv 0. \tag{9}$$

对于微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f(t, x, y),\\ \frac{dy}{dt}&=g(t, x, y),\end{aligned} \tag{10}$$

假设f、g、$\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、$\frac{\partial g}{\partial x}$和$\frac{\partial g}{\partial y}$在区域$G$内是连续的，如果$x=\varphi(t; t_0, x_0, y_0)$、$y=\psi(t; t_0, x_0, y_0)$是微分方程组(10)以$(t_0, x_0, y_0)$为初值的解，那末

$$z_1=\frac{\partial\varphi(t; t_0, x_0, y_0)}{\partial x_0}, \quad z_2=\frac{\partial\psi(t; t_0, x_0, y_0)}{\partial x_0}$$

和

$$z_1=\frac{\partial\varphi(t; t_0, x_0, y_0)}{\partial y_0}, \quad z_2=\frac{\partial\psi(t; t_0, x_0, y_0)}{\partial y_0}$$

都是变分方程组

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt}&=\frac{\partial f(t, \varphi, \psi)}{\partial x}z_1+\frac{\partial f(t, \varphi, \psi)}{\partial y}z_2,\\ \frac{dz_2}{dt}&=\frac{\partial g(t, \varphi, \psi)}{\partial x}z_1+\frac{\partial g(t, \varphi, \psi)}{\partial y}z_2\end{aligned} \tag{11}$$

的解，分别适合初值条件

$$z_1(t_0)=1, \ z_2(t_0)=0$$

和

$$z_1(t_0)=0, \ z_2(t_0)=1.$$

它的证明和定理1类似.

对于含参数μ的微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x, \mu), \ x(t_0)=x_0, \tag{12}$$

如果引进未知量y，可得方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt}=0$$

和初值条件

$$x(t_0)=x_0, \ y(t_0)=\mu.$$

它的解是

$$x=\varphi(t;\mu),$$
$$y=\mu.$$

因此，偏导数

$$z_1=\frac{\partial\varphi(t,\mu)}{\partial\mu},\ z_2=1$$

满足方程组

$$\frac{dz_1}{dt}=\frac{\partial f(t,\varphi(t,\mu),\mu)}{\partial x}z_1+\frac{\partial f(t,\varphi(t,\mu),\mu)}{\partial\mu}z_2,$$

$$\frac{dz_2}{dt}=0,$$

即 $\varphi(t,\mu)$ 对 μ 的偏导数

$$z=\frac{\partial\varphi(t,\mu)}{\partial\mu}$$

满足方程

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f(t,\varphi(t,\mu),\mu)}{\partial x}z+\frac{\partial f(t,\varphi(t,\mu),\mu)}{\partial\mu},\qquad(13)$$

及初值条件

$$z(t_0)=0\qquad(14)$$

因此证得下述定理.

定理2 对于含参数 μ 的微分方程(12)，假设 $f(t,x,\mu)$，$\dfrac{\partial f(t,x,\mu)}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f(t,x,\mu)}{\partial\mu}$ 在区域 G 内是连续的. 又设 $x=\varphi(t,\mu)$ 是方程(12)以 (t_0,x_0) 为初值的解. 如果 $\varphi(t,\mu_0)$ 在 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上存在，那末存在 $\eta>0$，使得当 $|\mu-\mu_0|\leqslant\eta$ 时 $\varphi(t,\mu)$ 在 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上存在，并且 $z=\dfrac{\partial\varphi(t,\mu)}{\partial\mu}$ 是线性微分方程(13)的解，满足条件(14).

根据(13)和(14)得

$$\frac{\partial\varphi(t,\mu)}{\partial\mu}=\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f(s,\varphi(s,\mu),\mu)}{\partial\mu}\times\exp\left(\int_{s}^{t}\frac{\partial f(\tau,\varphi(\tau,\mu),\mu)}{\partial x}d\tau\right)ds.$$

习 题

1. 叙述常微分方程组的解对初值的可微性定理，并导出变分方程组和初值条件。

2. 证明本节定理 1 关于 $\dfrac{\partial\varphi(t;t_0,x_0)}{\partial t_0}$ 的部分。

3. 设 $x=\varphi(t,\mu)$ 是下列方程的解，适合初值条件 $\varphi(0,\mu)=0$，试分别从 φ 的表达式及变分方程求出 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}$.

1) $\dfrac{dx}{dt}=1-\mu x$; 2) $\dfrac{dx}{dt}=(1+x)\sqrt{1-\mu^2t^2}$.

4. 设 $x=\varphi(t;x_0,y_0)$，$y=\psi(t;x_0,y_0)$ 是方程组

$$\frac{dx}{dt}=xy+t^2,\quad 2\frac{dy}{dt}=-y^2,$$

的解，适合条件

$$\varphi(1,x_0,y_0)=x_0,\ \psi(1,x_0,y_0)=y_0,$$

试分别从解的表达式及变分方程组求出 $\dfrac{\partial\varphi(t;3,2)}{\partial y_0}$.

5. 设方程组

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(x_1,x_2),\ \frac{dx_2}{dt}=f_2(x_1,x_2)$$

有周期解，其中 $f_1(x_1,x_2)$ 和 $f_2(x_1,x_2)$ 是连续可微的，试证该方程组关于周期解的变分方程组是周期系数的线性微分方程组，且该变分方程组有周期解.

6. 对于方程组

$$\frac{dx}{dt}=-y+x(1-x^2-y^2),$$
$$\frac{dy}{dt}=x+y(1-x^2-y^2)$$

1) 验证 $x=\cos t$, $y=\sin t$ 是它的解;

2) 求出该方程组关于解 $x=\cos t$, $y=\sin t$ 的变分方程组;

3) 求出变分方程组的全部解.

7. 设 Ω 和 Ω_1 是适合 § 2 定理 1 条件 1°、2° 的函数族，A 映 Ω 到 Ω，满足压缩映象条件

$$\|A(\varphi_1)-A(\varphi_2)\|\leqslant\theta\|\varphi_1-\varphi_2\|,\ 0<\theta<1;$$

B 映 $\Omega\times\Omega_1$ 到 Ω_1，且对任何 $\varphi\in\Omega$, ψ_1、$\psi_2\in\Omega_1$ 成立着

$$\|B(\varphi,\psi_1)-B(\varphi,\psi_2)\|\leqslant\theta\|\psi_1-\psi_2\|,$$

试证：如果 $A(\varphi_0)=\varphi_0$, $B(\varphi_0, \psi_0)=\psi_0$, $B(\cdot, \psi_0)$ 映 Ω 到 Ω 是连续的，$\varphi_{n+1}=A(\varphi_n)$, $\psi_{n+1}=B(\varphi_n, \psi_n)(n=1, 2, \cdots)$，那末

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi_0,\quad \lim_{n\to\infty}\psi_n=\psi_0.$$

8. 利用第7题证明定理1.

*§6 皮亚诺定理和奥斯古德定理

对于一阶常微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x), \tag{1}$$

初值问题

$$x(t_0)=x_0 \tag{2}$$

的解的存在性和唯一性是两个不同的问题，前面我们是同时解决这两个问题的。现在分别讨论它们。

首先讨论解的存在性问题。为此，我们需要函数族的一些有关性质和引理。

设 Ω 是由在有界闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有定义的某些连续函数组成的集合。如果存在正数 M，使得当 f 是 Ω 中的函数时，成立着不等式

$$|f(t)|\leqslant M \quad (a\leqslant t\leqslant b),$$

我们就称函数族 Ω 是一致有界的。

如果对于给定的 $\varepsilon>0$，存在仅与 ε 有关的正数 $\delta(\varepsilon)>0$，使得对于 Ω 中的任一函数 f，当 $|t-\bar{t}|<\delta$, $a\leqslant t, \bar{t}\leqslant b$ 时

$$|f(t)-f(\bar{t})|<\varepsilon,$$

那末称 Ω 是同等连续的。

引理1 如果 Ω 是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的一致有界的、同等连续的函数族，并且 Ω 含有无穷多个函数，那末在 Ω 中存在一个函数列 $f_k(k=1, 2, \cdots)$，它在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上一致收敛.

证 因为 Ω 是一致有界的，所以存在正数 $M>0$，使得当 f 是 Ω 中的函数时

$$|f(t)|\leqslant M \quad (a\leqslant t\leqslant b). \tag{3}$$

在(t, x)平面上作闭矩形 $\bar{R}$:

$$\bar{R}:\ a\leqslant t\leqslant b,\ -M\leqslant x\leqslant M.$$

根据(3)，Ω 中函数 f 的图形完全位在 R 中.

由于 Ω 是同等连续的，对于 $\varepsilon_1=\frac{M}{2}$，存在 $\delta_1=\frac{b-a}{2^{l_1}}>0$ (l_1 是正整数)，使得当$|t-\bar{t}|\leqslant\delta_1$, $a\leqslant t$, $\bar{t}\leqslant b$ 时，

$$|f(t)-f(\bar{t})|<\varepsilon_1$$

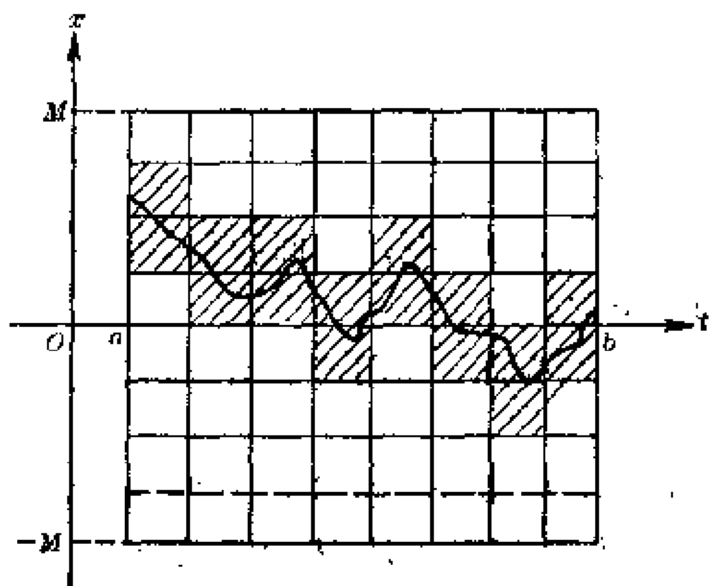


图 4.5

对于 Ω 中的任一函数 f 成立. 用直线 $t=t_j=a+j\delta_1$ ($j=1, 2, \cdots, 2^{l_1}-1$)把矩形 $\bar{R}$ 分成 2^{l_1} 个铅直长条. 再以平行于 x 轴的直线把它们分为高为 ε_1 的小矩形. 由于在每一铅直长条中同一函数的函数值之差的绝对值小于 ε_1，所以 Ω 中的每一函数的图形最多只能经过两个相邻的高为 ε_1 的小矩形. 在 2^{l_1} 个铅直长条的每一长条中各取两个相邻的高为 ε_1 的小矩形，并使相邻长条中的两个小矩形有邻接的边(如图 4.5)，它们构成一个高为 $2\varepsilon_1$ 的多边形长带. 由于小矩形的个数是有限的，因此可以由它们构成的这种高为 $2\varepsilon_1$ 的多边形长带的个数是有限的，而 Ω 中有无穷多个函数，从而至少存在一个高为 $2\varepsilon_1$ 的多边形长带 S_1，其中含有 Ω 中的无穷多个函数的图形. 将这无穷多个函数记为 μ_1.

对于 $\varepsilon_2=\frac{M}{2^2}$，同样存在 $\delta_2=\frac{b-a}{2^{l_2}}$ ($l_2>l_1$ 是正整数). 从而可把 $\bar{R}$ 分为高为 ε_2、宽为 δ_2 的小矩形，并且存在一个含在 S_1 中而高为 $2\varepsilon_2$ 的多边形长带 S_2，而 S_2 含有 μ_1 的无穷多个函数的图形. 把它记为 μ_2.

一般地说，假设已经作出了高为 $2\varepsilon_k=\frac{M}{2^{k-1}}$ 的多边形长带 S_k 以及含在 S_k 中的函数族 μ_k 后，我们就可以作出高为 $2\varepsilon_{k+1}=\frac{M}{2^k}$ 的多边形长带 S_{k+1} 和含在 S_{k+1} 中的函数族 μ_{k+1}.

这样，我们得到一列函数族 $\mu_k(k=1, 2, \cdots)$，具有性质：

1° $\mu_1\supseteq\mu_2\supseteq\cdots\supseteq\mu_k\supseteq\cdots$,

2° 对于 μ_k 中任意两个函数 f^1 和 f^2，成立着

$$|f^1(t)-f^2(t)|\leqslant 2\varepsilon_k=\frac{b-a}{2^{k-1}}\quad (a\leqslant t\leqslant b).$$

在 μ_1 中取函数 f_1，μ_2 中取不同于 f_1 的函数 f_2，…，在 μ_k 中取不同于 f_1、f_2、…、f_{k-1} 的函数 f_k，那末对于任何自然数 k 和 l，因为 $f_k\in\mu_k$，$f_{k+l}\in\mu_{k+l}\subseteq\mu_k$，所以

$$|f_k(t)-f_{k+l}(t)|\leqslant\frac{M}{2^{k-1}}\quad (a\leqslant t\leqslant b).$$

因此，函数列 $\{f_k(t)\}$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上一致收敛. 引理证毕.

该引理是实轴上有界无穷点集必有收敛子列的维尔斯特拉斯(Weiestrass)定理的推广，是由阿尔采拉(Arzela)和阿斯哥里(Ascoli)证明的.

定理1 假设函数 $f(t, x)$ 在矩形

$$R:\ |t-t_0|\leqslant a,\ |x-x_0|\leqslant b$$

上是连续的，那末在区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上存在连续可微函数 $x=\varphi(t)$，它是方程(1)的解，且满足初值条件(2)，这里

$$h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right),\quad M=\max_R|f(t, x)|.$$

证 这是皮亚诺(Peano)定理. 下面的证明方法是陶耐里(Tonelli)的.

不妨在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$ 上讨论. 设 k 是自然数，在区间 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\frac{1}{k}h$ 上定义

$$\varphi_k(t)\equiv x_0\quad \left(t_0\leqslant t\leqslant t_0+\frac{1}{k}h\right),$$

它位在矩形 $\bar{R}$ 上. 当 $t_0+\frac{1}{k}h\leqslant t\leqslant t_0+\frac{2}{k}h$ 时, $t_0\leqslant t-\frac{h}{k}\leqslant t_0+\frac{1}{k}h$, 从而我们可以定义

$$\varphi_k(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t-\frac{1}{k}h}f(s,\ \varphi_k(s))ds. \tag{4}$$

并且

$$|\varphi_k(t)-x_0|\leqslant M\left(t-\frac{1}{k}h-t_0\right)\leqslant Mh\leqslant b. \tag{5}$$

从而当 $t_0+\frac{1}{k}h\leqslant t\leqslant t_0+\frac{2}{k}h$ 时, $\varphi_k(t)$ 位在 $\bar{R}$ 上; 如果 $\varphi_k(t)$ 已在区间 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+j\frac{h}{k}$ 上有定义, 且位在 $\bar{R}$ 上, 那末可用(4)把它扩展到区间 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+(j+1)\frac{h}{k}$ 上. 因此, 当 $t_0+\frac{1}{k}h\leqslant t\leqslant t_0+h$ 时, 可逐步用(4)来定义 $\varphi_k(t)$, 从而 $\varphi_k(t)$ 在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$ 上是连续的. 并且当 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$ 时

$$|\varphi_k(t)-x_0|\leqslant Mh\leqslant b,$$

从而

$$|\varphi_k(t)|\leqslant|x_0|+b,$$

所以 $\{\varphi_k(t)\}(k=1,\ 2,\ \cdots)$ 在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$ 上是一致有界的.

另外, 如果 $t,\ \bar{t}\geqslant t_0+\frac{1}{k}h$, 那末

$$|\varphi_k(\bar{t})-\varphi_k(t)|=\left|\int_{t-\frac{1}{k}h}^{\bar{t}-\frac{1}{k}h}f(s,\ \varphi_k(s))\,ds\right|$$

$$\leqslant M|\bar{t}-t|;$$

如果 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\frac{1}{k}h,\ \bar{t}\geqslant t_0+\frac{1}{k}h$, 那末

$$|\varphi_k(\bar{t})-\varphi_k(t)|=\left|\int_{t_0}^{\bar{t}-\frac{1}{k}h}f(s,\ \varphi_k(s))\,ds\right|$$

$$\leqslant M\left|\bar{t}-\left(t_0+\frac{1}{k}h\right)\right|\leqslant M|\bar{t}-t|.$$

因此, 当 $t_0\leqslant t,\ \bar{t}\leqslant t_0+h$ 时

$$|\varphi_k(\bar{t})-\varphi_k(t)|\leqslant M|\bar{t}-t|.$$

从而对于 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，那末当 $|t-\bar{t}|<\delta$ 时

$$|\varphi_k(t)-\varphi_k(\bar{t})|<\varepsilon,$$

即 $\{\varphi_k(t)\}$ 在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$ 上是同等连续的.

根据阿尔采拉引理，存在 $\{\varphi_k(t)\}$ 的子序列 $\{\varphi_{k_j}(t)\}$，它在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$ 上一致收敛，设它的极限为 $\varphi(t)$. 在等式

$$\varphi_{k_j}(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi_{k_j}(s))\,ds-\int_{t-\frac{1}{k_j}h}^{t} f(s,\varphi_{k_j}(s))\,ds$$

的两端令 $k_j\to+\infty$ 得

$$\varphi(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi(s))\,ds,$$

即 $x=\varphi(t)$ 是微分方程(1)满足初值条件(2)的解. 定理证毕.

该定理只回答了初值问题解的存在性. 一般地说，f 的连续性不能保证初值问题解的唯一性. 例如，微分方程

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}$$

的右端是连续的，容易验证 $x\equiv 0$ 和 $x=t^{\frac{3}{2}}$ 都是它的解，并且都以 $(0,\ 0)$ 为初值. 拉甫伦捷也夫(Лаврентьев)还构造了一个右端连续的微分方程，过每一点至少有两条积分曲线.

下面的奥斯古德(Osgood)定理是关于初值问题解的唯一性的.

引理 2 设 $y(t)$ 和 $z(t)$ 是在区间 $\alpha<t<\beta$ 内的连续可微函数，并且

$$\frac{dy(t)}{dt}<g(t,\ y(t)), \tag{6}$$

$$\frac{dz(t)}{dt}\equiv g(t,\ z(t)), \tag{7}$$

$$y(t_1)=z(t_1),$$

那末当 $\alpha<t<t_1$ 时

$$z(t)<y(t); \tag{8}$$

当 $t_1<t<\beta$ 时

$$y(t)<z(t). \tag{9}$$

证 因为当 $t=t_1$ 时

$$\frac{d}{dt}\{z(t)-y(t)\}\Big|_{t=t_1}=g(t_1,\ y(t_1))-\frac{dy(t_1)}{dt}>0,$$

所以存在 $\eta>0$，使得当 $(\eta-t_1)<t<t_1$ 时

$$z(t)-y(t)<z(t_1)-y(t_1)=0.$$

如果(8)在 $\alpha<t<t_1$ 内不恒成立，必存在 $\bar{t}$ 满足：$\alpha<\bar{t}<t_1$ 使得当 $\bar{t}<t<t_1$ 时(8)成立，而当 $t=\bar{t}$ 时

$$z(\bar{t})=y(\bar{t}),$$

从而 $$\frac{dz(\bar{t})}{dt}\leqslant\frac{dy(\bar{t})}{dt}<g(\bar{t},\ y(\bar{t}))=g(\bar{t},\ z(\bar{t})).$$

它与(7)矛盾．所以(8)成立．同样可证(9)．

定理 2(奥斯古德)　设(1)的右端 $f(t,\ x)$ 适合

$$|f(t,\ \bar{x})-f(t,\ x)|\leqslant\omega(|\bar{x}-x|),\tag{10}$$

其中 $\omega(u)$ 在 $0\leqslant u\leqslant 2b$ 上是 u 的单调增加的连续函数，$\omega(0)=0$，$\omega(u)>0(u>0)$，并且

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{2b}\frac{du}{\omega(u)}=+\infty,\tag{11}$$

那末方程(1)以 $(t_0,\ x_0)$ 为初值的解在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上是唯一的，这里的 h 与定理 1 相同．

证　设 $x=\varphi_1(t)$ 和 $x=\varphi_2(t)$ 在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上都是方程(1)的解，且以 $(t_0,\ x_0)$ 为初值．如果 $\varphi_1(t)\not\equiv\varphi_2(t)$，那末必存在 t_1 使得 $\varphi_1(t_1)\neq\varphi_2(t_1)$，不妨假设 $t_0<t_1\leqslant t_0+h$，且

$$\varphi_2(t_1)>\varphi_1(t_1).$$

置 $$y(t)\equiv\varphi_2(t)-\varphi_1(t),$$

那末当 $y(t)>0$ 时

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt}&\equiv f(t,\ \varphi_2(t))-f(t,\ \varphi_1(t))\\&\leqslant\omega(|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|)=\omega(y(t))<2\omega(y(t)).\end{aligned}$$

设 $z(t)$ 是微分方程

$$\frac{dz}{dt}=2\omega(z)\tag{12}$$

适合条件 $$z(t_1)-y(t_1)>0.$$

的解. 根据 §1 例 4 的讨论知, 在定理的条件(11)下, 方程(12)的解 $z=z(t)$ 在 $-\infty<t\leqslant t_1$ 中存在, 并且

$$z(t)>0,\quad \lim_{t\to-\infty} z(t)=0.$$

现在证明: 当 $t_0<t\leqslant t_1$ 时 $y(t)>0$. 不然的话, 存在 $\bar{t}$ 位于 $t_0<\bar{t}<t_1$, 使得当 $\bar{t}<t<t_1$ 时

$$y(t)>0,$$

而

$$y(\bar{t})=0.$$

这时, 根据引理 2 得到: 当 $\bar{t}<t<t_1$ 时

$$z(t)<y(t),$$

从而

$$0<z(\bar{t})\leqslant y(\bar{t})=0$$

这是矛盾的. 所以当 $t_0<t\leqslant t_1$ 时 $y(t)>0$, 并且

$$z(t)<y(t)$$

从而

$$0<z(t_0)\leqslant y(t_0)=0,$$

又是矛盾. 因此, 不存在 t_1 使得 $\varphi_1(t_1)\neq\varphi_2(t_1)$, 即得

$$\varphi_1(t)\equiv\varphi_2(t).$$

定理证毕.

显然, 下述函数

$$Ku,\ Ku|\ln u|,\ Ku|\ln u|\,|\ln|\ln u||,\ \cdots$$

等等都可以作为(10)中的函数 $\omega(u)$. 所以, 如果 f 关于 x 满足李普希兹条件, 那末初值问题的解存在且唯一.

习 题

1. 试举例说明阿尔采拉引理中的条件都是不能省的.

2. 如果 Ω 是有界闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的同等连续的函数族, 并且存在 $M>0$, 使得当 f 是 Ω 的函数时

$$|f(a)|\leqslant M,$$

那末 Ω 是一致有界的.

3. 试对微分方程(1)构造以$(t_0,\ x_0)$为初值的欧拉折线, 并且利用它证明皮亚诺定理.

4. 设 $x=\varphi(t)$是微分方程

$$\frac{dx}{dt}=2x-x^2+3e^{1-x}$$

的解，满足条件 $\varphi(0)=1$．试证：$\varphi(t)$在 $0<t<+\infty$ 内存在，并且满足不等式

$$\frac{2}{1+e^{-2t}}<\varphi(t)<\frac{3-e^{-4t}}{1+e^{-4t}}.$$

第五章

定性理论初步

微分方程是研究自然现象、社会现象和工程技术问题的数学工具之一. 人们往往通过求解描述现象的微分方程或确定它的解的性状,来解释自然现象或社会现象. 例如,求出两个天体在万有引力作用下的运动方程的解,我们推出了开普勒三定律,解释了太阳系行星的运动规律. 在此基础上,人们进而提出 n 个天体在万有引力作用下的运动规律问题,首先是三个天体的运行规律问题. 但是,还不能求出三体问题的运动方程的全部解,这促使人们直接从微分方程本身来研究解的性状,以解释三体问题的运行规律. 从上世纪八十年代以来,许多科学家致力于该问题的研究. 法国数学家庞加来 (H. Poincaré) 正是环绕三体问题,研究了相空间(相平面)、奇点和极限圈等一系列的问题,讨论了常微分方程定义的积分曲线的几何性状,创立了常微分方程定性理论. 这种以三体问题为背景的定性理论,在本世纪三十年代首先在无线电电子学,接着在自动控制理论、非线性振动理论中都得到广泛的应用,推动了定性理论的发展. 与庞加来同时,俄国数学家李雅普诺夫(A. M. Ляпунов)创立了运动稳定性理论.

本章介绍定性理论和稳定性理论的初步知识,即相平面、奇点和极限圈的基础知识,解的稳定性概念和稳定性理论的基本定理.

§1 相平面和奇点

一、相平面

右端不显含自变量 t 的微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f(x,\ y),\\ \frac{dy}{dt}&=g(x,\ y),\end{aligned}\tag{1}$$

称为自治系统的微分方程，简称自治系统，其中 $f(x,\ y)$ 和 $g(x,\ y)$ 是 x、y 的连续可微函数.

当给定 x_0、y_0 后，方程组(1)存在唯一的解

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\tag{2}$$

满足条件 $\varphi(0)=x_0,\ \psi(0)=y_0.$

显然，$x=\varphi(t-\alpha)$，$y=\psi(t-\alpha)$ 也是方程组 (1) 的解，其中 α 是常数，这时 $\varphi(t-\alpha)\big|_{t=\alpha}=x_0$，$\psi(t-\alpha)\big|_{t=\alpha}=y_0$.

把 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 视为 $(x,\ y)$ 平面上曲线的参数方程，那末它在点 $(\varphi(t),\ \psi(t))$ 处的切向量是

$$(f(\varphi(t),\ \psi(t)),\ g(\varphi(t),\ \psi(t))),$$

即该曲线在点 $(x,\ y)$ 处的切向量是 $(f(x,\ y),\ g(x,\ y))$. 在 t、x、y 空间中的曲线 $(t,\ \varphi(t),\ \psi(t))$ 是微分方程组 (1) 的积分曲线，而它在 $(x,\ y)$ 平面上的投影就是以 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 为参数方程的曲线，称为方程组 (1) 的相轨线，而 $(x,\ y)$ 平面称为自治系统的相平面.

微分方程组的积分曲线是不相交的，它们在 $(x,\ y)$ 平面上的投影（相轨线）是否相交呢？如果 $x=u(t)$，$y=v(t)$ 是方程组 (1) 的另一解，它在 $(x,\ y)$ 平面上的图形——相轨线与相轨线 (2) 相交于某一点，即存在 t_1 和 t_2 使得

$$\varphi(t_1)=u(t_2),\ \psi(t_1)=v(t_2),$$

那末因为 $x=u(t+t_2-t_1)$，$y=v(t+t_2-t_1)$ 也是(1)的解，满足

$$\begin{aligned}u(t+t_2-t_1)\big|_{t=t_1}&=u(t_2)=\varphi(t_1),\\ v(t+t_2-t_1)\big|_{t=t_1}&=v(t_2)=\psi(t_1),\end{aligned}$$

从而由初值问题解的唯一性得到

$$u(t+t_2-t_1)\equiv\varphi(t),\ v(t+t_2-t_1)\equiv\psi(t),$$

即 $x=u(t+t_2-t_1)$，$y=v(t+t_2-t_1)$ 和 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 完全一

致. 从而 $x=u(t)$, $y=v(t)$ 在 (x, y) 平面上表示的曲线与 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 表示的曲线完全一致. 因此, 相轨线或者重合或者不相交.

当 $\varphi(t)\equiv a$, $\psi(t)\equiv b$ 时, 相轨线退化为 (x, y) 平面上的一个点, 这时

$$f(a, b)=0,\ g(a, b)=0. \tag{3}$$

反之, 若 (a, b) 适合 (3), 那末 $x\equiv a$, $y\equiv b$ 是方程组 (1) 的解, 相轨线退化为一点 (a, b). 称 (a, b) 为自治系统 (1) 的奇点, 也称为 (1) 的平衡位置.

例如, 具有阻尼的单摆运动方程是

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+b\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0, \tag{4}$$

这里 φ 是摆角, l 是摆长, b 是阻尼系数, g 是重力加速度. 若置

$$x=\varphi,\ y=\frac{d\varphi}{dt},$$

那末 (4) 可化为微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin x-by.$$

显然, $x=k\pi, y=0$ 是它的平衡位置, 其中 k 为整数. 这也表明, 一个二阶自治系统的奇点可能不止一个. 但是, 我们总是对各个奇点逐一进行讨论.

如果 (a, b) 是系统 (1) 的奇点, 置 $\tilde{x}=x-a$, $\tilde{y}=y-b$, 那末 (1) 变为

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=f(\tilde{x}+a, \tilde{y}+b),$$

$$\frac{d\tilde{y}}{dt}=g(\tilde{x}+a, \tilde{y}+b).$$

它仍是自治系统, 并且 $(0, 0)$ 是它的奇点. 因此, 我们可以假设奇点为 $(0, 0)$, 而不会妨碍讨论的一般性.

设(0, 0)是方程组(1)的奇点，那末

$$f(0, 0)=0,\quad g(0, 0)=0.$$

若记

$$\alpha=\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x},\quad \beta=\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y},$$

$$\gamma=\frac{\partial g(0, 0)}{\partial x},\quad \delta=\frac{\partial g(0, 0)}{\partial y},$$

那末在(0, 0)附近成立着

$$f(x, y)=\alpha x+\beta y+X(x, y),$$

$$g(x, y)=\gamma x+\delta y+Y(x, y),$$

其中 $X(x, y)$, $Y(x, y)$ 在(0, 0)附近连续可微，并且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{X(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{Y(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.\tag{5}$$

方程组(1)在(0, 0)附近可表示如下：

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x+\beta y+X(x, y),\quad \frac{dy}{dt}=\gamma x+\delta y+Y(x, y),\tag{6}$$

其中 X、Y 满足条件(5)。

二、二阶线性系统的奇点

为讨论自治系统(6)在奇点(0, 0)附近相轨线的性状，先讨论它的一次近似方程组的相轨线的性状，然后借助于一次近似讨论(6)。方程组(6)的一次近似是二阶系统

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x+\beta y,\quad \frac{dy}{dt}=\gamma x+\delta y.\tag{7}$$

该方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}.$$

当 A 的行列式

$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$$

时，方程组(7)有唯一的奇点 (0, 0)；当 A 的行列式为 0 时，如果 α、β、γ 和 δ 不全为 0，例如 $\alpha\neq 0$，那末 $\alpha x+\beta y=0$ 上的点都是奇点；当 A 的元素全为 0 时，相平面上的每一点都是奇点．下面主要讨论 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ 的情形．

对于方程组(7)的相轨线的性状，可以借助于它的解的表达式来进行．从第三章对常系数线性微分方程组的讨论知道，它取决于系数矩阵 A 的特征值的情况．A 的特征方程是

$$\begin{vmatrix}\lambda-\alpha & -\beta\\ -\gamma & \lambda-\delta\end{vmatrix}=\lambda^2-(\alpha+\delta)\lambda+(\alpha\delta-\beta\gamma)=0.$$

1．当 $(\alpha+\delta)^2-4(\alpha\delta-\beta\gamma)=(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma>0$ 时，A 有两个不同的实特征值 λ_1 和 λ_2．如果 A 相应于 λ_1 和 λ_2 的特征向量为 $\begin{pmatrix}h_{11}\\ h_{12}\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}h_{21}\\ h_{22}\end{pmatrix}$，那末它们是线性无关的．根据第三章 §2 的定理 2，方程组(7)的通解是

$$\begin{aligned}x&=c_1h_{11}e^{\lambda_1 t}+c_2h_{21}e^{\lambda_2 t},\\ y&=c_1h_{12}e^{\lambda_1 t}+c_2h_{22}e^{\lambda_2 t}.\end{aligned}\tag{8}$$

由表达式(8)得到：

当 $c_1=c_2=0$ 时，它是奇点 (0, 0)；

当 $c_1\neq 0$, $c_2=0$ 时，它是

$$x=c_1h_{11}e^{\lambda_1 t},\ y=c_1h_{12}e^{\lambda_1 t},$$

这是从(0, 0)出发而不含(0,0)的半直线．当 $\lambda_1<0$ 时，该半直线上的点当 $t\to+\infty$ 时趋于(0, 0)；而若 $\lambda_1>0$，那末当 $t\to-\infty$ 时趋于(0,0)，即当 t 增加时，轨线的点远离奇点(0, 0)．半直线是直线

$$h_{12}x-h_{11}y=0\tag{9}$$

的一部分．

当 $c_1=0$, $c_2\neq 0$ 时，(7)的解是

$$x=c_2h_{21}e^{\lambda_2 t};\ y=c_2h_{22}e^{\lambda_2 t},$$

它也是半直线，即是直线

$$h_{22}x-h_{21}y=0\tag{10}$$

除去(0, 0)后的两条半直线.

问题在于这两条直线 (9) 和 (10) 能否直接由方程组 (7) 来决定?由于这两条直线都过原点,设它们的斜率为 k, 这时 $\dot{y}(t)/\dot{x}(t)=k$, 从而 k 应当适合

$$k=\dot{y}(t)/\dot{x}(t)=(\gamma+\delta k)/(\alpha+\beta k),$$

即

$$\beta k^2+(\alpha-\delta)k-\gamma=0, \tag{11}$$

当 $(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma>0$ 时, 它有两个实根 k_1 和 k_2. 也就是说, 直线(9)和(10)的斜率是由方程 (11) 决定的. 所以, 并不需要求出 A 的特征向量. 其实, 由(11)能决定特征向量.

为进一步讨论, 对 λ_1、λ_2 的不同情形仔细分析:

1° $\lambda_1<\lambda_2<0$.

这时, (7)的每一相轨线当 $t\to+\infty$ 时趋于奇点(0, 0). 并且当 $c_1\neq0$, $c_2\neq0$ 时

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{c_1h_{12}e^{\lambda_1t}+c_2h_{22}e^{\lambda_2t}}{c_1h_{11}e^{\lambda_1t}+c_2h_{21}e^{\lambda_2t}}=\frac{h_{22}}{h_{21}},$$

即是直线(10)的斜率. 它表明, 所有其余的相轨线都趋于(0, 0), 且在(0, 0)处与直线(10)相切.

同样, 当 $t\to-\infty$ 时, $(x(t), y(t))$ 趋于无穷远, 且它的渐近线的斜率为 $\dfrac{h_{12}}{h_{11}}$, 即渐近线与直线(9)平行. 这时, 奇点称为稳定结点.

2° $0<\lambda_1<\lambda_2$.

这时, 当 $t\to-\infty$ 时, (7)的每一相轨线趋于(0, 0), 即相轨线远离(0, 0). 情形与 1° 相似. 这时, 奇点(0, 0)称为不稳定结点.

3° $\lambda_1<0<\lambda_2$.

这时, 当 $c_1\neq0$, $c_2\neq0$ 时, 相轨线当 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$ 时都趋于无穷远, 并且它的渐近线的斜率分别为 k_1 和 k_2, 即是直线(9)和(10)的斜率. 进而可以证明, (9)和(10)是相轨线的渐近线.

这时, 奇点称为鞍点.

因此, 当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时, 相轨线的大致形状已经决定. 剩下的问

题是，当奇点是结点时，相轨线趋于(0, 0)的切线斜率是方程 (11) 的哪一个根. 为此，我们看一些例题.

[例 1] 设二阶系统是

$$\frac{dx}{dt}=-3x-2y,$$

$$\frac{dy}{dt}=x.$$

这时，特征方程

$$\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

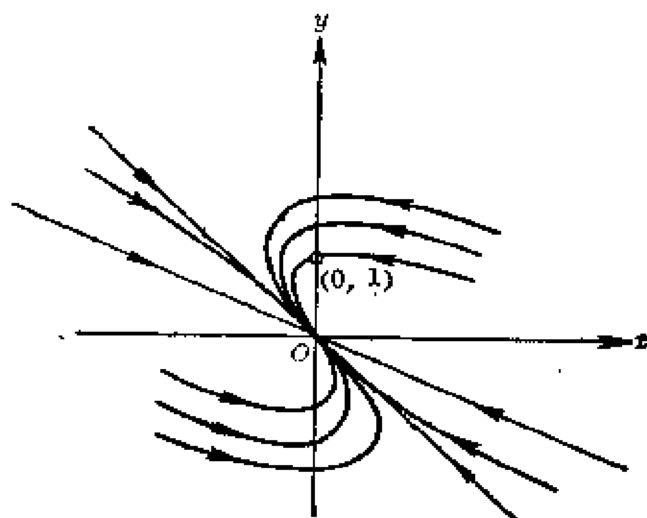


图 5.1

有两个负根. 从而 (0, 0) 是稳定结点.

而趋于(0, 0)的半直线相轨线的斜率 k 由

$$2k^2+3k+1=(2k+1)(k+1)=0$$

决定. 所以 $k_1=\frac{-1}{2}$, $k_2=-1$.

为了决定相轨线趋于 (0, 0) 时公切线的斜率，我们取点 (0, 1)，轨线在(0, 1)处的切线指向是向量 (−2, 0). 由于相轨线是不相交的，从(0, 1)出发的相轨线当 $t\to+\infty$ 时趋于(0, 0)，所以应当与 $y=-x$ 相切(见图 5.1).

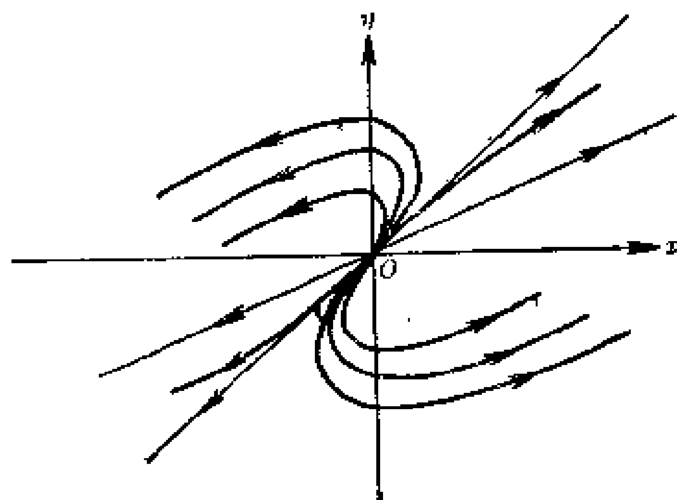


图 5.2

[例 2] 设二阶系统是

$$\frac{dx}{dt}=3x-2y,$$

$$\frac{dy}{dt}=x.$$

特征方程

$$\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

有两个正根 1 和 2. 方程(11)是

$$2k^2-3k+1=(2k-1)(k-1)=0,$$

所以 $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=1$.

为决定当 $t\to-\infty$ 时相轨线的公切线斜率，取点 (0, 1)，过 (0, 1) 的相轨线的切线指向与向量 (−2, 0) 一致，从而相轨线在 $t\to-\infty$ 时的公切线斜率为 1（图 5.2）.

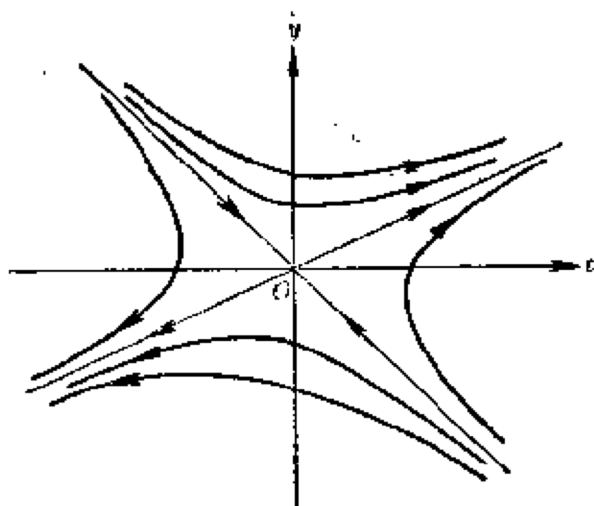


图 5.3

［例 3］ 设二阶系统是

$$\frac{dx}{dt}=x+2y,$$

$$\frac{dy}{dt}=x.$$

特征方程是

$$\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)=0.$$

它有两个根 −1 和 2，所以奇点是鞍点.

方程(11)成为

$$2k^2+k-1=(2k-1)(k+1)=0,$$

所以 $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=-1$.

由于当 $x>0$ 时，$\frac{dy}{dt}>0$；当 $x<0$ 时，$\frac{dy}{dt}<0$. 所以相轨线性状如图 5.3 所示.

2．当 $(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma=0$ 时，A 有两个相同的特征值 λ. 这时，根据第三章 §2 的定理 3，(7) 的解的表达式有两种可能的情形.

1° 如果 A 相应于 λ 有两个线性无关的特征向量 $\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix}$，那末(7)的通解是

$$x=(c_1h_{11}+c_2h_{21})e^{\lambda t},$$
$$y=(c_1h_{12}+c_2h_{22})e^{\lambda t}.$$

当 $c_1^2+c_2^2\neq 0$ 时，它们都是趋于或远离(0, 0)的半直线.

由于 c_1 和 c_2 可以是任意的，所以任何趋于或远离(0, 0)的半直线都是方程组(7)的相轨线.

当 $\lambda<0$ 时，相轨线都趋于(0, 0)，称奇点(0, 0)是稳定的临界结点(图 5.4a)；当 $\lambda>0$ 时，相轨线都远离(0, 0)，称奇点(0, 0)为不稳定的临界结点(图 5.4b).

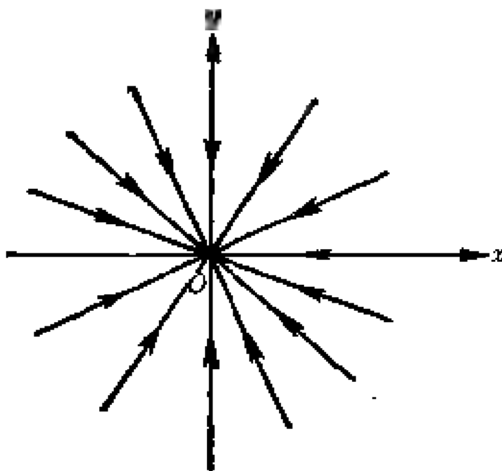


图 5.4a

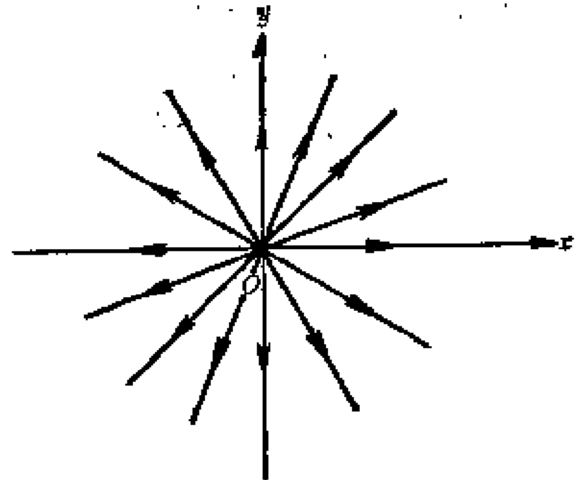


图 5.4b

显然，系统

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x,$$
$$\frac{dy}{dt}=\lambda y$$

是这种情形.

2° 如果 A 相应于 λ 只有一个特征向量 $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$，这时(7)的通解具有形状

$$x=c_1h_1e^{\lambda t}+c_2(h_1t+g_1)e^{\lambda t},$$
$$y=c_1h_2e^{\lambda t}+c_2(h_2t+g_2)e^{\lambda t},$$

其中
$$\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix}$$

是 A 相应于 λ 的循环向量系数多项式. 如果 $\lambda<0$, 那末当 $t\to+\infty$ 时, 相轨线趋于(0, 0).

当 $c_1\neq0$, $c_2=0$ 时, 相轨线是半直线

$$x=c_1h_1e^{\lambda t},\ y=c_1h_2e^{\lambda t};\tag{12}$$

当 $c_2\neq0$ 时, 如果 $t\to+\infty$, 那末

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{c_1h_2+c_2(h_2t+g_2)}{c_1h_1+c_2(h_1t+g_1)}\to\frac{h_2}{h_1},$$

即相轨线以半直线(12)为公切线. 当 $t\to-\infty$ 时, 相轨线的渐近方向也是半直线(12)的方向.

半直线(12)的斜率 k 可由方程(11)决定.

[例 4] 设二阶系统是

$$\frac{dx}{dt}=-4x-4y,$$
$$\frac{dy}{dt}=x.$$

这时, 特征方程

$$\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$$

有两个相同的根 -2. 方程(11)是

$$-4k^2-4k-1=-(2k+1)^2=0,$$

所以 $k=-\frac{1}{2}$.

相轨线分布如图5.5. 奇点(0,0)称为稳定的退化结点.

当 $\lambda>0$ 时, (0, 0) 是不稳定的退化结点.

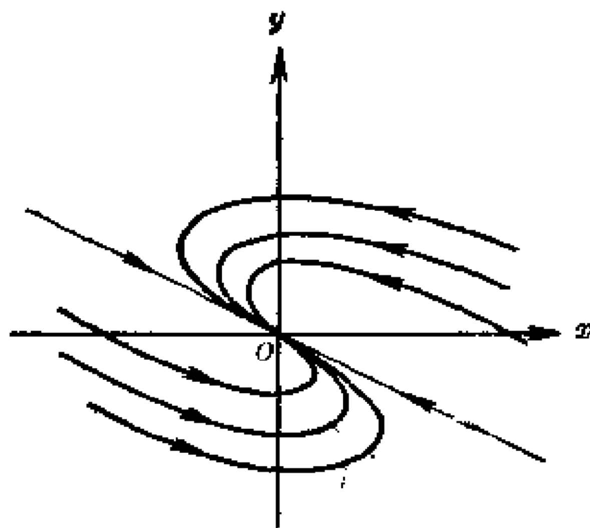


图 5.5

怎样区分临界结点和退化结点呢？我们知道，在退化结点时，仅有两条趋于(0, 0)的半直线是相轨线，而在临界结点时有无穷多条. 所以，只要从方程(11)有几个根来决定就可以了. 如果(11)仅有一个根，那末(0, 0)是退化结点；如果(11)退化为不定方程，即 $\alpha=\delta$, $\beta=\gamma=0$, 那末(0, 0)是临界结点.

3. 当 $(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma<0$ 时，A 有两个互为共轭复数的特征值 $\lambda=\mu+i\nu$ 和 $\bar{\lambda}=\mu-i\nu(\nu>0)$.

设 A 相应于特征值 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{h}+i\boldsymbol{k}$, 这里 $\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$ 是实向量，即

$$A\boldsymbol{h}+iA\boldsymbol{k}=\mu\boldsymbol{h}-\nu\boldsymbol{k}+i(\nu\boldsymbol{h}+\mu\boldsymbol{k}),$$

从而

$$A\boldsymbol{h}=\mu\boldsymbol{h}-\nu\boldsymbol{k},\quad A\boldsymbol{k}=\nu\boldsymbol{h}+\mu\boldsymbol{k}.$$

记 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, 置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}\tilde{x}+\boldsymbol{k}\tilde{y}$, 即

$$x=h_1\tilde{x}+k_1\tilde{y},\quad y=h_2\tilde{x}+k_2\tilde{y}, \tag{13}$$

那末

$$\boldsymbol{h}\frac{d\tilde{x}}{dt}+\boldsymbol{k}\frac{d\tilde{y}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(\boldsymbol{h}\tilde{x}+\boldsymbol{k}\tilde{y}).$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}\frac{d\tilde{x}}{dt}+\boldsymbol{k}\frac{d\tilde{y}}{dt}&=(\mu\boldsymbol{h}-\nu\boldsymbol{k})\tilde{x}+(\nu\boldsymbol{h}+\mu\boldsymbol{k})\tilde{y}\\&=(\mu\tilde{x}+\nu\tilde{y})\boldsymbol{h}+(-\nu\tilde{x}+\mu\tilde{y})\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是线性无关的，所以

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=\mu\tilde{x}+\nu\tilde{y},\quad \frac{d\tilde{y}}{dt}=-\nu\tilde{x}+\mu\tilde{y}. \tag{14}$$

从而

$$\tilde{x}\frac{d\tilde{x}}{dt}+\tilde{y}\frac{d\tilde{y}}{dt}=\mu(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2),$$

$$\tilde{x}\frac{d\tilde{y}}{dt}-\tilde{y}\frac{d\tilde{x}}{dt}=-\nu(x^2+y^2),$$

所以

$$\tilde{x}^2(t)+\tilde{y}^2(t)=c^2e^{2\mu t}. \tag{15}$$

其中 c 为任意常数. 又

$$\frac{d}{dt}\operatorname{arc\,tg}\frac{\tilde{y}(t)}{\tilde{x}(t)}=-\nu,$$

所以

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\tilde{y}(t)}{\tilde{x}(t)}=\theta_0-\nu t,\tag{16}$$

其中 θ_0 为另一任意常数.

在 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 平面引进极坐标

$$\tilde{x}=\tilde{r}\cos\theta,\ \tilde{y}=\tilde{r}\sin\theta,$$

那末由(15)和(16)得到

$$\tilde{r}=\tilde{r}_0e^{\mu t},\ \ \theta=\theta_0-\nu t,$$

其中 $\tilde{r}_0=c$, 从而相轨线在 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 平面上的极坐标方程是

$$\tilde{r}=\tilde{r}_0\exp\left(-\frac{\mu}{\nu}(\theta-\theta_0)\right).$$

它是环绕坐标原点 $\tilde{O}$ 的螺线.

设 $\tilde{l}$ 是 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 平面上过原点 $\tilde{O}$ 的直线:

$$\tilde{y}=\tilde{m}\tilde{x},$$

相轨线在 $t=t_0$ 时刻与 $\tilde{l}$ 相交于 $\tilde{M}_0$, 经时间 $\frac{\pi}{\nu}$ 后, 幅角 θ 减小角度 π, 从而再次与直线 $\tilde{l}$ 相交, 设交点为 $\tilde{M}_1$, 这时 $\tilde{O}\tilde{M}_1$ 的长等于 $\tilde{O}\tilde{M}_0$ 的长乘以 $e^{\frac{\mu}{\nu}\pi}$. 如果 l、M_0 和 M_1 分别为 $\tilde{l}$、$\tilde{M}_0$ 和 $\tilde{M}_1$ 在线性变换(13)下的象, 那末 OM_0 的长的平方

$$\begin{aligned}\overline{OM}_0^2=x^2+y^2&=(h_1\tilde{x}+k_1\tilde{y})^2+(h_2\tilde{x}+k_2\tilde{y})^2\\&=\{(h_1+\tilde{m}k_1)^2+(h_2+\tilde{m}k_2)^2\}\tilde{x}^2\\&=\{(h_1+\tilde{m}k_1)^2+(h_2+\tilde{m}k_2)^2\}\frac{1}{1+\tilde{m}^2}(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2),\end{aligned}$$

即

$$\overline{OM}_0=p\overline{\tilde{O}\tilde{M}}_0,$$

其中 $p^2=\{(h_1+\tilde{m}k_1)^2+(h_2+\tilde{m}k_2)^2\}/(1+\tilde{m}^2)$ 是常数. 同样

$$\overline{OM}_1=p\overline{\tilde{O}\tilde{M}}_1.$$

因此, 我们得到

$$\overline{OM}_1=e^{\frac{\mu}{\nu}\pi}\,\overline{OM}_0.$$

这里系数 $e^{\frac{\mu}{\nu}\pi}$ 与点 M_0 的位置无关.所以,相轨线绕原点旋转角度 π 后,它的向径是原来长度的 $e^{\frac{\mu}{\nu}\pi}$ 倍.

由是得到

1° 如果 $\mu<0$, 那末相轨线是环绕原点 O 的螺旋线, 且当 $t\to+\infty$ 时趋于奇点 $(0, 0)$, 称这种奇点为稳定焦点.

2° 如果 $\mu>0$, 那末当 $t\to-\infty$ 时 $(x(t), y(t))\to(0, 0)$, 奇点 $(0, 0)$ 是不稳定焦点.

3° 如果 $\mu=0$, 那末由(14)得到 $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=c_1^2+c_2^2$ 是 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 平面上的圆周,在线性变换(13)下变为 (x, y) 平面上的椭圆, 即相轨线是以 $(0, 0)$ 为中心的椭圆. 奇点称为中心.

它们相轨线的性状如图 5.6 所示.

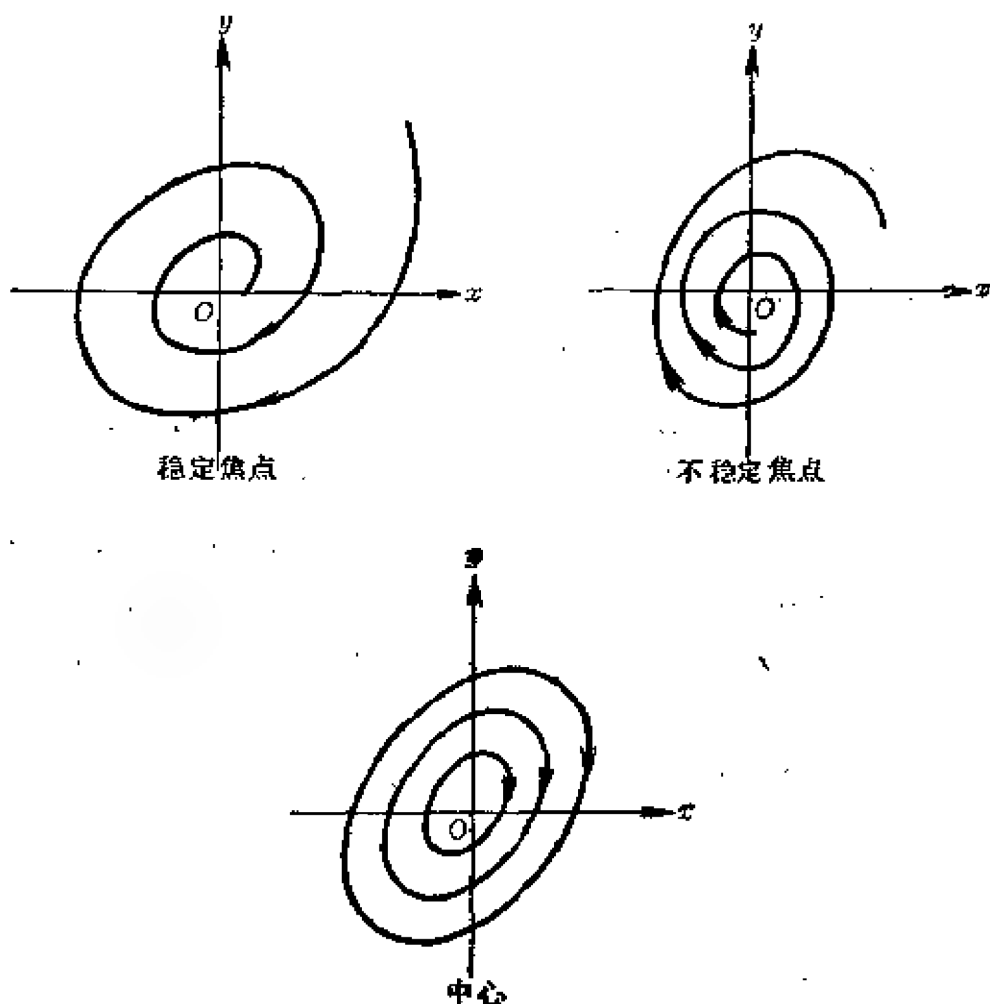


图 5.6

综上所述，我们得证下面的定理.

定理1 对于二阶线性系统(7)，假设系数矩阵 A 的特征值为 λ_1 和 λ_2，那末奇点(0, 0)的类型由 λ_1 和 λ_2 决定，即

1° 当 $\lambda_1\leqslant\lambda_2<0$ 时，它是稳定结点；

2° 当 $\lambda_1<0<\lambda_2$ 时，它是鞍点；

3° 当 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2$ 时，它是不稳定结点；

4° 当 $\lambda_1=\bar{\lambda}_2=\mu+i\nu$, $\mu\neq0$, $\nu\neq0$ 时，它是焦点；

5° 当 $\lambda_1=\bar{\lambda}_2=i\nu$ 时，它是中心.

三、关于非线性系统的裴戎(Perron)定理

对于非线性系统(6)，有下述的裴戎定理.

定理2 对于非线性系统(6)：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\alpha x+\beta y+X(x,\ y),\\ \frac{dy}{dt}&=\gamma x+\delta y+Y(x,\ y),\end{aligned}\tag{6}$$

假设 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$, A 的特征值为 λ_1 和 λ_2，且当 $(x,\ y)\to(0,\ 0)$ 时

$$X^2(x,\ y)+Y^2(x,\ y)=O\{(x^2+y^2)^{1+\varepsilon}\},$$

其中 $\varepsilon>0$ 是常数，那末

1° 当 $\lambda_1\leqslant\lambda_2<0$ 时，(0, 0)是(6)的稳定结点，即在奇点附近相轨线都趋于奇点，它们在(0, 0)有公切线（可能有两条轨线例外）；

2° 当 $\lambda_1<0<\lambda_2$ 时，(0,0)是(6)的鞍点，即除两条趋于(0,0)和两条远离(0,0)的相轨线外，其余相轨线都不趋于奇点(0,0)；

3° 当 $\lambda_1=\bar{\lambda}_2=\mu+i\nu$, $\mu\neq0$, $\nu\neq0$ 时，(0, 0)是(6)的焦点，即相轨线是盘旋趋于或远离奇点(0, 0).

这就是说，当 A 的特征值不具有零实部时，方程组(6)的相轨线性状由它的一次近似决定. 该定理的证明比较复杂，我们省略了.

[例5] 考虑具有阻尼的单摆运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+b\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0.$$

置 $x=\varphi$，$y=\frac{d\varphi}{dt}$，它等价于方程组

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y,\\ \frac{dy}{dt}&=-\frac{g}{l}\sin x-by.\end{aligned}\tag{17}$$

它是一个非线性系统．我们来考察该系统的相图．

首先，讨论点(0, 0)．这时，一次近似方程是

$$\frac{dx}{dt}=y,$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}x-by.$$

特征方程是
$$\lambda^2+b\lambda+\frac{g}{l}=0.$$

当 $b>0$ 充分小时，它的根是一对共轭复数，$\mathrm{Re}\,\lambda=-\frac{b}{2}<0$，从而(0, 0)是稳定焦点．

其次，讨论奇点$(\pi, 0)$．置

$$\tilde{x}=x-\pi,\ \tilde{y}=y,$$

那末
$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=\tilde{y},$$

$$\frac{d\tilde{y}}{dt}=-\frac{g}{l}\sin(\tilde{x}+\pi)-b\tilde{y}=\frac{g}{l}\sin\tilde{x}-b\tilde{y},$$

它的一次近似方程是

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=\tilde{y},$$

$$\frac{d\tilde{y}}{dt}=\frac{g}{l}\tilde{x}-b\tilde{y}.$$

特征方程是
$$\lambda^2+b\lambda-\frac{g}{l}=0,$$

具有两个异号的实根，所以奇点是鞍点．而鞍点附近有两条相轨线

趋于鞍点，有两条相轨线负向趋于鞍点，我们称它们为鞍点的分界线。分界线在鞍点处的切线斜率 k 由下式决定：

$$k=\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{g}{l}\sin\tilde{x}(t)-b\tilde{y}(t)}{\tilde{y}(t)}=\frac{\frac{g}{l}-bk}{k},$$

即 k 满足方程
$$k^2+bk-\frac{g}{l}=0,$$

它具有两个异号的实根。因此，$(\pi, 0)$是系统(17)的鞍点。它的分界线的切线斜率 k 适合上式。

同样，$(-\pi, 0)$也是(17)的鞍点，分界线的切线斜率 k 也适合上式。而$(0, 0)$、$(2\pi, 0)$、$(-2\pi, 0)$是稳定焦点。一般地，$(2j\pi, 0)$是稳定焦点，$((2j+1)\pi, 0)$是鞍点，其中 $j=0, \pm1, \pm2, \cdots$。从而系统(17)的相图如图 5.7。

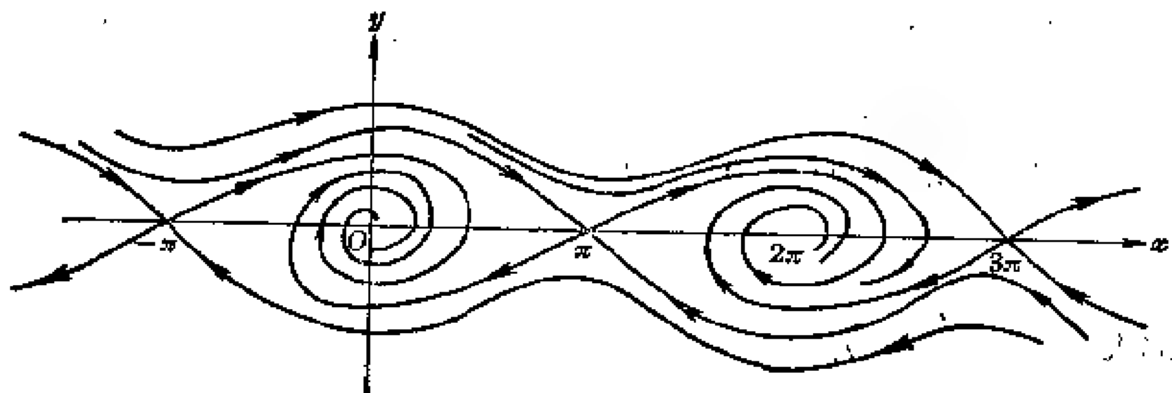


图 5.7

从上面的相图看出，如果单摆的初始动能和势能都较小，即初始速度和摆角较小，那末单摆只能在平衡位置附近来回摆动，并且由于阻尼的作用而最后趋于静止；如果单摆的初始能量适当，它将趋于新的平衡位置 π，且需要无限时间；如果初始能量更大，它将绕过平衡位置 π，而走向平衡位置 2π，且在 2π 附近摆动(相应于单摆绕一周而在平衡位置附近摆动)；如果初始能量再大，它将绕过 π、2π，以至趋于 3π，或绕过 3π 而在 4π 附近摆动等等。总之，由相图可以看出单摆运动的种种可能的情形。

习 题

1. 确定方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=x(a^2-x^2)+by$$

的奇点及其类型($ab\neq 0$),并作相图.

2. 确定方程组

$$\frac{dx}{dt}=-ax-b\sin y,\quad \frac{dy}{dt}=x$$

的奇点及其类型($a\geqslant 0,\ b>0$),并作相图.

3. 对于下列方程组

1) $\dfrac{dx}{dt}=-4x+y,\qquad \dfrac{dy}{dt}=-3x;$

2) $\dfrac{dx}{dt}=4x+y,\qquad \dfrac{dy}{dt}=-3x;$

3) $\dfrac{dx}{dt}=-x-5+y,\quad \dfrac{dy}{dt}=-3x$

进行下面的工作:

1° 确定奇点及其类型;

2° 求出它们的相轨线的直角坐标表示式;

3° 作出相图.

4. 确定方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(x)+y,\quad \frac{dy}{dt}=-3x$$

的奇点,并作出相图,这里

$$f(x)=\begin{cases}-4x & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ 4x & \text{当 } -1<x\leqslant 0 \text{ 时},\\ -x-5 & \text{当 } x\leqslant -1 \text{ 时}.\end{cases}$$

5. 对于下列方程组

1) $\dfrac{dx}{dt}=y,\quad \dfrac{dy}{dt}=-2x-3y;$

2) $\dfrac{dx}{dt}=y,\quad \dfrac{dy}{dt}=-2x+3y;$

3) $\dfrac{dx}{dt}=y,\quad \dfrac{dy}{dt}=-2x-2y-5$

进行下面的工作:

1° 确定奇点及其类型;

2° 求出相轨线的直角坐标表达式;

3° 作出相图.

6. 确定方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-2x+f(y)$$

的奇点,并作相图,其中

$$f(y)=\begin{cases}-3y & \text{当 } 0<y \text{ 时},\\ 3y & \text{当 } -1<y\leqslant 0 \text{ 时},\\ -2y-5 & \text{当 } y\leqslant -1 \text{ 时}.\end{cases}$$

7. 确定无阻尼的单摆运动方程

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin x$$

的奇点及其类型,并作相图.

§2 极 限 圈

这一节进一步讨论二阶非线性自治系统

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=g(x,y) \tag{1}$$

的相轨线的分布状况,主要是讨论系统有周期解时的几何图象. 设 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 是自治系统(1)的周期解,即存在正的常数 T 使得

$$\varphi(t+T)\equiv\varphi(t),\ \psi(t+T)\equiv\psi(t),$$

那末该周期解的相图是相平面上的一条闭曲线,称为系统(1)的闭轨线. 在线性系统中,奇点是中心时,它附近的每一轨线是闭轨线;其余情形,系统没有闭轨线. 在二阶非线性自治系统中,有一类重要的由孤立闭轨线表述的运动,即由所谓极限圈(也称极限环)表示的运动,不仅对微分方程理论本身,而且在工程技术应用上也起着重要的作用. 在无线电技术中广泛使用的三极管振荡回路,是极限圈理论的重要应用. 这是不能用线性化来表征的物理现象,我们在下面将说明这一点.

一、简单例题

我们从考察以下的例子开始.

[例1] 考察系统

$$\frac{dx}{dt}=y+x(1-x^2-y^2),\quad \frac{dy}{dt}=-x+y(1-x^2-y^2).$$

引用极坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 即 $r^2=x^2+y^2$, $\theta=\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$, 那末方程组化为

$$r\frac{dr}{dt}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=r^2(1-r^2),$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}}{x^2+y^2}=-1,$$

从而 $\dfrac{dr^2}{d\theta}=-2r^2(1-r^2)$,

即 $r=0$, $r=1$,

以及 $r=\dfrac{1}{\sqrt{1+ce^{2\theta}}}$.

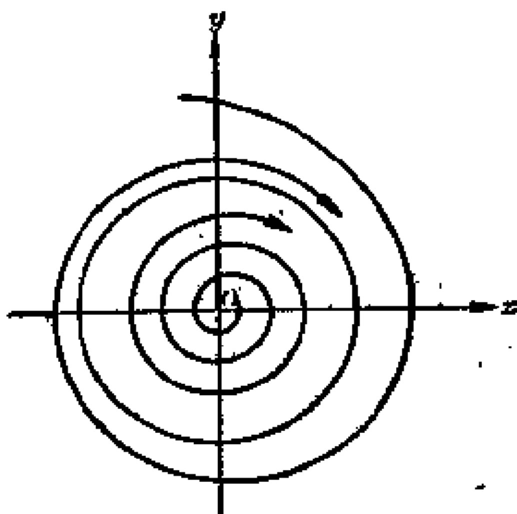


图 5.8

当 $c=0$ 时, 它是 $r=1$, 即单位圆周 Γ: $x^2+y^2=1$.

当 $c>0$ 时, 它是位于单位圆周 Γ 内的螺旋线. 当 $\theta\to+\infty$ 时, 它趋于奇点 (0, 0); 当 $\theta\to-\infty$ 时, 它盘旋逼近于单位圆周 Γ.

当 $c<0$ 时, 它位于单位圆周 Γ 的外部. 当 $\theta\to-\infty$ 时, 它盘旋逼近于单位圆周 Γ; 当 $\theta\to\dfrac{1}{2}\ln(-c)$ 时, $r\to+\infty$.

该例题表明, 单位圆周 Γ: $x^2+y^2=1$ 是一条闭轨线, 而在它的充分小的邻域中, 系统的其余轨线都盘旋趋于它. 我们说 Γ 是系统的极限圈. 而奇点(0, 0)是它的不稳定焦点.

[例2] 考察二阶系统

$$\frac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2)\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2)\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

规定右端函数当 $x=y=0$ 时取值 0.

引用极坐标，该方程组化为

$$\frac{dr}{dt}=r^3\sin\frac{\pi}{r},\quad \frac{d\theta}{dt}=1.$$

所以，每个圆周 Γ_n:

$$\Gamma_n:\ r=\frac{1}{n}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

都是方程组的闭轨线；并且当 $1<r$ 时，

$$\frac{dr}{dt}>0;$$

当 $\frac{1}{2m}<r<\frac{1}{2m-1}$, $m=1,\ 2,\ \cdots$ 时，　$\frac{dr}{dt}<0$;

当 $\frac{1}{2m+1}<r<\frac{1}{2m}$, $m=1,\ 2,\ \cdots$ 时，　$\frac{dr}{dt}>0$.

因此，位于两条闭轨线 Γ_n 和 Γ_{n+1} 之间的每条轨线是(正向或负向)盘旋逼近于 Γ_n 或 Γ_{n+1} 的。

这样，系统有无穷多条孤立的闭轨线，都对应于方程组的周期解。

在奇点 (0, 0) 的每一邻域中含有无限多条闭轨线，我们也称具有这种性质的奇点为“中心焦点”。

以上两个例子只是解释二阶非线性自治系统可能出现的闭轨线的情况。下面，我们分析无线电电子学中的一个问题，即三极管振荡回路。

二、电子管振荡器的工作原理

电子管振荡器是由电子管(或晶体管)、电容、自感线圈、电阻、互感线圈及直流电源组成的振荡器，它具有不衰减的周期振荡。它是无线电技术中最简单的振荡器，有着广泛的技术应用。它的工作原理正是二阶非线性自治系统的极限圈理论的重要应用。这里解释它的工作原理。

三极管是一种电子管，它具有三个极——板极 a、栅极 s 和阴极 k. 在栅极和阴极之间有电势差 U_S, 称为栅压，但没有电流. 而从板极到阴极之间有电流 i_a, 它受栅压 U_S 控制，即

$$i_a=f(U_S),$$

其中 f 是三极管的特性函数，它是单调增加的函数，当 $U_S\to-\infty$ 时它趋于 0, 当 $U_S\to+\infty$ 时它趋于有限值 I_M.

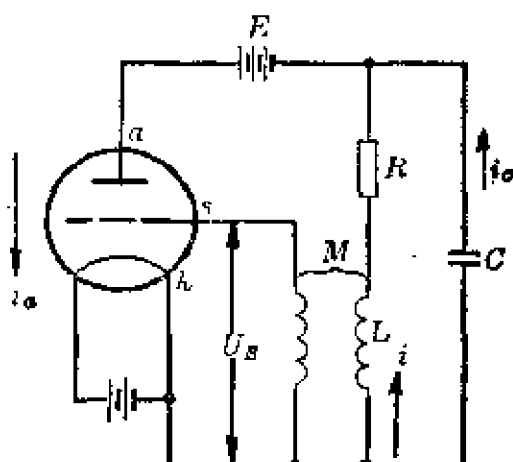


图 5.9

电子管振荡器的振荡回路如图 5.9, 因此

$$i_a=i+i_c.$$

在 LRC 回路中应用基尔霍夫定律得

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int(i-i_a)dt=0,$$

两边对 t 求导得

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{1}{C}i_a=\frac{1}{C}f(U_S),$$

根据互感 M 得

$$U_S=M\frac{di}{dt},$$

所以 i 适合方程

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{1}{C}f\left(M\frac{di}{dt}\right).$$

这就是描述电子管振荡器工作的非线性微分方程.

置

$$x=i-f(0),$$

$$y=\frac{dx}{dt},$$

那末它可化为二阶非线性自治方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{LC}x-\frac{R}{L}y+\frac{1}{LC}\{f(My)-f(0)\}.$$

若引进记号

$$\omega^2=\frac{1}{LC},\quad 2\delta=\frac{R}{L},$$

$$g(y)=\omega^2\{f(My)-f(0)\},$$

那末方程组成为

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=y,\\&\frac{dy}{dt}=-\omega^2x-2\delta y+g(y).\end{aligned}\tag{2}$$

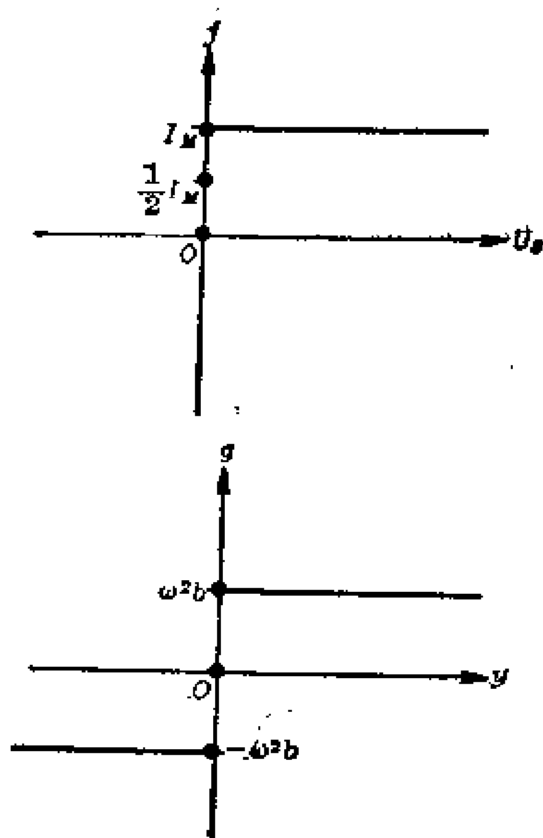


图　5.10

由于 f 是单调增加的，所以 g 也是 y 的单调增加函数，并且 $g(0)=0$. 因此，$(0,0)$是方程组(2)的唯一的奇点.

特别简单的情形是函数 $f(U_S)$呈如下形状：

$$f(U_S)=\begin{cases}I_M, & \text{当 } U_S>0 \text{ 时},\\ \frac{1}{2}I_M, & \text{当 } U_S=0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } U_S<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

这时

$$g(y)=\begin{cases}\omega^2b, & \text{当 } y>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } y=0 \text{ 时},\\ -\omega^2b, & \text{当 } y<0 \text{ 时},\end{cases}$$

其中 $b=I_M/2$.

因此，当 $y>0$ 时，(2)呈形状

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=y,\\&\frac{dy}{dt}=-\omega^2(x-b)-2\delta y;\end{aligned}\tag{3}$$

当 $y<0$ 时，(2)呈形状

$$\frac{dx}{dt}=y,$$
$$\frac{dy}{dt}=-\omega^2(x+b)-2\delta y. \tag{4}$$

如果在整个相平面上讨论(3)，那末$(b, 0)$是(3)的稳定焦点．当$\delta^2<\omega^2$时，系数阵的特征值是一对具有负实部的共轭复数，从而奇点是稳定焦点．同样，$(-b, 0)$是(4)的稳定焦点．

为完整地讨论(2)的相轨线，应当把(3)和(4)的相轨线在$y=0$处连接起来．

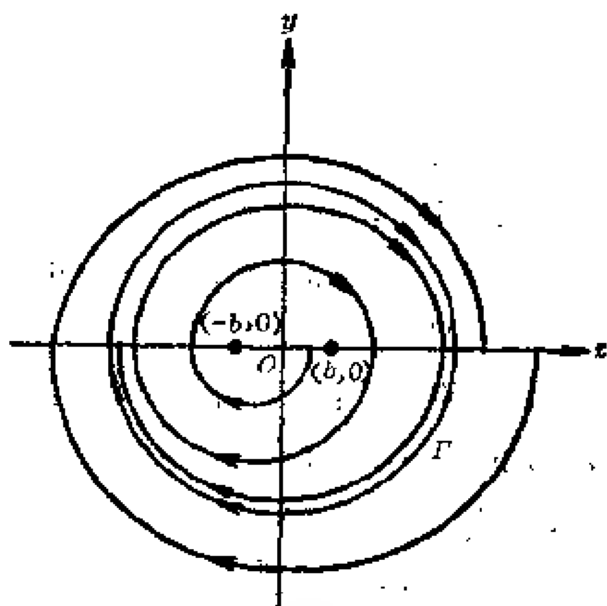


图 5.11

当$y=0$, $x=\xi$时，因为$g(0)=0$，所以相轨线的切向量应当是$(0, -\omega^2\xi)$．当$\xi>0$时，它指向半平面$y<0$；当$\xi<0$时，它指向半平面$y>0$．因此，当$\xi>0$时，相轨线按(4)在半平面$y<0$上以顺时针方向绕$(-b, 0)$旋转，直到与x轴相交于点$(-\eta, 0)$, $\eta>b$．并且，由于$(-b, 0)$是稳定焦点，所以点$(-\eta, 0)$与奇点$(-b, 0)$的距离$\eta-b$是点$(\xi, 0)$与$(-b, 0)$的距离$\xi+b$的k倍，而$k<1$．所以

$$\eta=b+k(\xi+b). \tag{5}$$

当相轨线到达点$(-\eta, 0)$时，它是指向半平面$y>0$．所以，相轨线接着按(3)在半平面$y>0$上以顺时针方向绕$(b, 0)$旋转，直到与x轴相交于点$(\xi_1, 0)$．由于(3)的系数矩阵和(4)的完全一样，所以$(\xi_1, 0)$与奇点$(b, 0)$的距离ξ_1-b也是$(-\eta, 0)$与$(b, 0)$的距离$\eta+b$的k倍．因此

$$\begin{aligned}\xi_1&=b+k(\eta+b)=b+k(2b+k(\xi+b))\\&=b+2kb+k^2b+k^2\xi.\end{aligned}$$

因此点 $(\xi, 0)$ 沿系统 (2) 的相轨线绕 $(0, 0)$ 顺时针旋转角度 2π 后到达点 $(\xi_1, 0)$，当 $\xi_1=\xi$ 时得到(2)的一条闭轨线，即当

$$\xi=\xi_1(=\xi_0)=(1+2k+k^2)b/(1-k^2)=\frac{1+k}{1-k}b$$

时，$\xi_1=\xi=\xi_0$，所以从 $(\xi_0, 0)$ 出发的相轨线是闭轨线 Γ.

当 $\xi\neq\xi_0$ 时，相轨线绕 $(0, 0)$ 顺时针旋转角度 2π 后到达点 $(\xi_1, 0)$，而

$$\xi_1=(1-k^2)\xi_0+k^2\xi,$$

所以

$$\xi_1-\xi_0=k^2(\xi-\xi_0).$$

显然，如果 $\xi>\xi_0$，那末 $\xi_1>\xi_0$，并且 $\xi_1-\xi_0<\xi-\xi_0$（由于 $0<k<1$），即相轨线盘旋逼近于闭轨线 Γ；如果 $\xi<\xi_0$，那末 $\xi_1<\xi_0$，且 $\xi_0-\xi_1=k^2(\xi_0-\xi)$，相轨线也盘旋逼近于闭轨线 Γ.

这说明闭轨线 Γ 是系统(2)的极限圈，并且系统(2)的其余的相轨线都趋于它。我们称 Γ 是**稳定的极限圈**。它表明系统(2)当 $g(y)$ 满足 (3) 时有一个周期解，而其余的解的相轨线都趋于闭轨线，即电子管振荡器具有不衰减的周期振荡。这是非线性系统才具有的特性，它不能用线性化来解释.

三、闭轨线存在与否的判别法

极限圈是二阶非线性自治系统的一类重要的轨线。判断一个系统是否存在极限圈是十分重要和困难的问题.

定理 1（班狄克森 (Bendixson) 否定判据） 设 f、g 在单连通区域 D 内连续可微，并且 $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}+\dfrac{\partial g(x, y)}{\partial y}\neq 0$，那末系统 (1) 在 D 内不存在闭轨线.

证 我们利用格林(Green)公式用反证法来证明定理.

如果系统 (1) 存在周期为 T 的周期解 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，它的相图是闭轨线 Γ，Γ 所围的区域记为 G. 那末由格林公式

$$\int_\Gamma (g\,dx-f\,dy)=-\iint_G\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

如果 $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial y}>0$，那末上式右端是负的，而

$$\int_{\Gamma} g\,dx - f\,dy = \int_0^T \left(g\frac{dx}{dt} - f\frac{dy}{dt}\right)dt = \int_0^T (gf - fg)dt = 0$$

得到矛盾．所以(1)无闭轨线位在 D 内．

［例 3］ 考察具有阻尼的单摆运动

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + b\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

置 $x=\varphi$, $y=\dot{\varphi}$, 得

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l}\sin x - by.$$

所以
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \equiv -b < 0.$$

根据定理 1 该方程组不存在周期解．

判断闭轨线的存在性，有下面的环域定理．

定理 2 如果在 (1) 的定义区域 D 内存在一个环域 G，G 不含有(1)的奇点，并且在 G 的边界处相轨线的切线都指向 G 内(或都指向 G 外)，那末在环域 G 中至少存在(1)的一条闭轨线．

它的证明需要较多的知识，省略了．

关于二阶非线性自治系统的极限圈个数和位置的讨论，是一个没有完全解决的问题．特别，当 f、g 是二次多项式时，称系统(1)是*二次微分系统*，我国学者已经证明存在二次微分系统具有四个极限圈．

联系非线性振动讨论方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0$$

是否存在周期解的问题，是一个重要的问题，并且已有许多精细的结果．

习　　题

1．确定方程组

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

的奇点和极限圈，并作相图，这里规定当 $x=y=0$ 时右端为0。

2. 证明方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x+y(1-x^2-y^2)$$

有唯一的闭轨线 $x=\cos t,\ y=-\sin t$. 并且证明它是稳定的极限圈.

3. 对于方程组

$$\frac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2)\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2)\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

假设当 $x=y=0$ 时，右端为0。

1) 验证 $x=\frac{1}{2}\cos t,\ y=\frac{1}{2}\sin t$ 是它的解;

2) 证明极限圈 $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ 是稳定的.

4. 试判别下列方程组有无极限圈存在.

1) $\frac{dx}{dt}=x+y+\frac{1}{3}x^3-xy^2,\qquad \frac{dy}{dt}=-x+y+x^2y+\frac{2}{3}y^3;$

2) $\frac{dx}{dt}=-2x+y-2xy^2,\qquad \frac{dy}{dt}=y+x^3-x^2y;$

3) $\frac{dx}{dt}=-x+y+x^3,\qquad \frac{dy}{dt}=-x-y+y^3.$

5. 设 B、f、g 在单连通区域 D 内连续可微，并且 $\frac{\partial}{\partial x}(Bf)+\frac{\partial}{\partial y}(Bg)\neq 0$, 试证：方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y),\ \frac{dy}{dt}=g(x,y)$$

在 D 内没有闭轨线.

6. 设 B、f、g 在环状区域 G 内连续可微，并且 $\frac{\partial}{\partial x}(Bf)+\frac{\partial}{\partial y}(Bg)\neq 0$, 试证：方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y),\ \frac{dy}{dt}=g(x,y)$$

在环状区域 G 内最多有一条闭轨线.

§3 解的稳定性的定义

前面我们讨论了二阶自治系统的奇点和极限圈，并曾讨论奇点的稳定性。现在，我们给出一阶常微分方程组的解的稳定性的定义和讨论解的稳定性的基本方法。

设一阶常微分方程组是

$$\frac{dx_k}{dt}=f_k(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{1}$$

其中 $f_k(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 在变量 t 的区间 $0\leqslant t<+\infty$ 中和变量 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 空间的某一区域 G 内是 $(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 的连续函数。为方便起见，我们常把 (1) 写成向量形式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x}), \tag{2}$$

这里 $\boldsymbol{x}$ 的分量是 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$，$\boldsymbol{f}$ 的分量是 $f_1(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \cdots,\ f_n(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$。如果当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 时

$$\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{a})=\boldsymbol{0} \quad (0\leqslant t<+\infty),$$

即 $\quad f_k(t,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\equiv 0 \quad (0\leqslant t<+\infty,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$

那末 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 是方程组 (2) 的解，我们称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 是方程组 (1) 的平衡位置。当 $\boldsymbol{f}$ 与变量 t 无关，即 $\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{f}(0,\ \boldsymbol{x})$ 时，称系统 (2) 是自治系统。自治系统的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 也称为奇点。

在 §1 讨论奇点附近相轨线性状时，曾指出：把奇点视为坐标原点是不会妨碍讨论的一般性。对于方程组 (2)，假设 $\boldsymbol{a}$ 是它的平衡位置，作变量的平移

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},$$

那末方程组 (2) 变为

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{x}}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\ \tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{a}), \tag{3}$$

而 $\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$ 是方程组 (3) 的平衡位置。所以，假设方程组 (2) 的平衡位置是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，不会妨碍讨论的一般性。

今后我们以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 表示方程组 (2) 的以 $(t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 为初

值的解，即设

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0));$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0.$$

关于方程组(2)的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的稳定性，我们引用俄国数学家李雅普诺夫(A. M. Ляпунов)的定义.

定义 1　如果对于 $t_0\geqslant 0$ 和任何正数 ε，存在正数 δ，使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时，方程组 (2) 的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 在区间 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中存在，并且在区间 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中成立着不等式

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\ \boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon, \tag{4}$$

那末称方程组(2)的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的.

该定义表明：如果 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的，那末当初值 $\boldsymbol{x}_0$ 趋于 $\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 在区间 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中一致地趋于 $\boldsymbol{0}$.

定义 2　如果存在正数 ε_0 和 t_0，对于任何 $\delta>0$，存在初值 $\boldsymbol{x}_0$ 和时刻 $t_1\geqslant t_0$，使得以$(t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$为初值的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$满足

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t_0;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)\|=\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta,$$

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t_1;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)\|\geqslant\varepsilon_0,$$

即不满足稳定性的定义，那末称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

定义 3　如果方程组 (2) 的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的，并且存在正数 $\sigma>0$，使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\sigma$ 时方程组 (2) 的以 $(t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 为初值的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 在区间 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中存在，并且成立着

$$\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}, \tag{5}$$

那末称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的.

由上述定义看出，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的稳定性是指

$$\lim_{\boldsymbol{x}_0\to\boldsymbol{0}}\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0} \tag{6}$$

在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中一致地成立. 显然，我们不能由 (5) 的成立推知 (6) 成立，所以在渐近稳定性定义中必须是 (5)、(6) 同时成立. 在本节习题中，读者将会具体构造方程组，它的每一解满足关系式 (5)，但它的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

必须指出，在稳定性的讨论中，区间 $t_0\leqslant t<+\infty$ 是无界的. 如果是在有界闭区间 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$ 上讨论，由于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是方程组 (2) 的解，$\boldsymbol{f}$ 满足解对初值的连续性定理的条件，那末存在 $\delta(t_0, T)>0$，使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$ 上存在，并且

$$\lim_{\boldsymbol{x}_0\to 0}\boldsymbol{\varphi}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$$

在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$ 上一致地成立. 所以当区间有界时，问题较为简单. 因此，解的稳定性与解对初值的连续性是有本质区别的.

[例 1]　讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x$$

的平衡位置的稳定性.

所给方程组仅有一个平衡位置 $x=y=0$. 以 (t_0, x_0, y_0) 为初值的解是

$$x=x_0\cos(t-t_0)+y_0\sin(t-t_0),$$
$$y=-x_0\sin(t-t_0)+y_0\cos(t-t_0).$$

所以
$$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2.$$

因此，对于 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，那末当 $x_0^2+y_0^2<\delta^2$ 时，

$$x^2(t)+y^2(t)<\varepsilon^2.$$

所以 $x=y=0$ 是稳定的. 但

$$\lim_{t\to+\infty}\{x^2(t)+y^2(t)\}=x_0^2+y_0^2\neq 0,$$

所以平衡位置不是渐近稳定的.

[例 2]　讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=x-1,\quad \frac{dy}{dt}=-y$$

的平衡位置的稳定性.

它的唯一的平衡位置是 $x=1$, $y=0$. 作变换

$$\tilde{x}=x-1,\quad \tilde{y}=y,$$

则得
$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=\tilde{x},\quad \frac{d\tilde{y}}{dt}=-\tilde{y},$$

以$(t_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$为初值的解是

$$\tilde{x}=\tilde{x}_0 e^{(t-t_0)}, \quad \tilde{y}=\tilde{y}_0 e^{-(t-t_0)},$$

它在$-\infty<t<+\infty$内存在，但是对于$\varepsilon_0=1$和$\tilde{x}_0\neq 0$, $\tilde{y}_0=0$. 存在

$$t_1=t_0+\ln\frac{2}{|\tilde{x}_0|},$$

使得
$$|\tilde{x}(t_1)|=|\tilde{x}_0|e^{t_1-t_0}=2>1,$$

所以$\tilde{x}=\tilde{y}=0$是不稳定的，从而$x=1$, $y=0$是原方程组的不稳定平衡位置.

[例 3]　讨论无阻尼单摆的运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

的零解$\varphi\equiv 0$的稳定性.

引进相坐标

$$x=\varphi, \quad y=\frac{d\varphi}{dt},$$

它就化为一阶方程组

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin x, \tag{7}$$

这时$x=y=0$是它的平衡位置. 为讨论它的平衡位置的稳定性，寻求它的首次积分. 由方程组得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{g}{ly}\sin x,$$

即
$$2y\,dy=-\frac{2g}{l}\sin x\,dx,$$

所以

$$y^2-y_0^2=-\int_{x_0}^{x}\frac{2g}{l}\sin x\,dx=\frac{2g}{l}(\cos x-\cos x_0)$$
$$=\frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{x_0}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right),$$

即得

$$y^2+\frac{4g}{l}\sin^2\frac{x}{2}=y_0^2+\frac{4g}{l}\sin^2\frac{x_0}{2}, \tag{8}$$

这是相轨线的方程，当 x_0, y_0 充分小时它是环绕 (0, 0) 的闭曲线.

由于我们在 $\varphi=0$ 附近讨论单摆的运动，可取 $|x|\leqslant\pi$，从而

$$\frac{2}{\pi}\left|\frac{x}{2}\right|\leqslant\left|\sin\frac{x}{2}\right|\leqslant\frac{|x|}{2},$$

把它应用到(8)式得

$$y^2(t)+\frac{4g}{l\pi^2}x^2(t)\leqslant y_0^2+\frac{g}{l}x_0^2,$$

从而
$$x^2(t)+y^2(t)\leqslant\frac{1+\frac{g}{l}}{\min\left(1,\ \frac{4g}{l\pi^2}\right)}(x_0^2+y_0^2).$$

所以(7)的平衡位置 $x=y=0$ 是稳定的. 由(8)知它不是渐近稳定的.

[例 4] 讨论常系数线性微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x} \tag{9}$$

的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的稳定性.

第三章 §2 在讨论常系数线性微分方程组时，曾根据方阵 A 的特征值的情形，对方程组 (9) 的解进行估计，得到的估计式是讨论(9)的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 稳定性的基础.

1° 如果方阵 A 的特征值都具有负的实部，那末存在 $\gamma>0$，使得(9)的每一解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足不等式

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}_0\|e^{-\gamma t}\quad(0\leqslant t<+\infty). \tag{10}$$

由此，对于 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon/M$，那末当 $0\leqslant t<+\infty$，$\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时，

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<M\delta=\varepsilon.$$

所以 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是稳定的，并且由(10)得

$$\lim_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=0.$$

于是，当 A 的特征值都有负实部时，(9) 的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是渐近稳定的.

2° 如果方阵 A 有一个特征值 λ_0，其实部为正，那末方程组(9)存在形状如下的解

$$\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{h}e^{\lambda_0 t}, \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{h}$ 是 A 相应于 λ_0 的特征向量，c 为任意常数，并且

$$\boldsymbol{x}(0)=c\boldsymbol{h},$$

因此，若取 $\boldsymbol{x}_0=c\boldsymbol{h}$，当 c 充分小时，$\|\boldsymbol{x}_0\|$ 充分小，但是解 (11) 是无界的．所以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的．

3° 如果方阵 A 的特征值的实部都不是正的，并且实部等于 0 的特征值所对应的循环向量系数多项式都是零次的，那末存在 $M>0$，使得当 $0\leqslant t<+\infty$ 时，

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}(0)\|,$$

所以方程组 (9) 的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的，但不是渐近稳定的．

4° 如果方阵 A 具有实部为 0 的特征值 λ_0，其相应的循环向量系数多项式 $\boldsymbol{p}(t)$ 的次数大于 0，那末 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的．这是因为 (9) 具有解

$$\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{p}(t)e^{\lambda_0 t},$$

从而

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|=\|c\boldsymbol{p}(t)\|.$$

由此得到结论．

因此，方程组 (9) 的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的充要条件为方阵 A 的特征值的实部都是负的．

现在讨论方程组 (2) 的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}(t)$ 的稳定性问题．设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 中是微分方程组 (2) 的解，即

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt}\equiv\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{\psi}(t))\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

引进变换

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\psi}(t),$$

那末得到方程组

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{x}}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\ \tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\psi}(t))-\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{\psi}(t))=\boldsymbol{g}(t,\ \tilde{\boldsymbol{x}}), \tag{12}$$

并且 $\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$ 是方程组 (12) 的平衡位置．如果 (12) 的平衡位置 $\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的，那末称方程组 (2) 的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}(t)$ 是稳定的；如果 $\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的，就称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}(t)$ 是不稳定的；如果 $\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定

的，就称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}(t)$ 是渐近稳定的．换句话说，如果对于 $t_0\geqslant 0$ 和正数 ε，存在正数 δ，使得当 $\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\psi}(t_0)\|<\delta$ 时，$\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中存在，并且成立着不等式

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\psi}(t)\|<\varepsilon\quad(t_0\leqslant t<+\infty),$$

那末就说解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}(t)$ 是稳定的．也可以用同样的方法写出关于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}(t)$ 渐近稳定性的分析定义．

[例 5] 讨论微分方程

$$RC\frac{dx}{dt}+x=E\cos\omega t$$

的周期解的稳定性，这里 R, C, E 和 ω 是常数．

它的周期解是

$$x=A\cos(\omega t+\beta),$$

其中

$$A=\frac{E}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}},$$

$$\beta=-\operatorname{arc\,tg}(RC\omega).$$

若置 $\tilde{x}=x-A\cos(\omega t+\beta)$，那末

$$RC\frac{d\tilde{x}}{dt}+\tilde{x}=0,$$

即

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=-\frac{1}{RC}\tilde{x},$$

因此 $\tilde{x}=0$ 是渐近稳定的，即系统的周期解

$$x=A\cos(\omega t+\beta)$$

是渐近稳定的．

习　题

1．试叙述二阶微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$$

的解的稳定性定义．

2．试分别就方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ y),\ \frac{dy}{dt}=g(x,\ y),$$

的平衡位置(0, 0)为稳定和不稳定的结点、焦点及鞍点、中心的不同情形，讨论平衡位置(0, 0)按李雅普诺夫意义的稳定性.

3. 讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=x,\quad \frac{dy}{dt}=x$$

的平衡位置的稳定性.

4. 讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=0,\quad \frac{dy}{dt}=\lambda y$$

的平衡位置的稳定性，其中 λ 是参数.

5. 对于方程组

$$\frac{dx}{dt}=-xy,\quad \frac{dy}{dt}=-y^2+x^4$$

1) 求出它的相轨线，并作相图;

2) 求出它的全部解;

3) 讨论平衡位置(0, 0)的稳定性.

6. 设函数 f 是

$$f(y)=\begin{cases}-3y, & \text{当 } y>0 \text{ 时,}\\ 3y, & \text{当 } -1<y\leqslant 0 \text{ 时,}\\ -2y-5 & \text{当 } y\leqslant -1 \text{ 时.}\end{cases}$$

试从方程组　$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-2x+f(y)$$

的相图(参看§1习题6)说明它的全部解当 $t\to+\infty$ 时的性状，并证明平衡位置(0, 0)是不稳定的.

7. 讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=ax+y,\quad \frac{dy}{dt}=-x+ay$$

的零解 $x=y=0$ 的稳定性.

8. 设 $g(t)$、$f(t)$ 在区间 $0\leqslant t<+\infty$ 中是连续的，试证关于微分方程

$$\frac{dx}{dt}=g(t)x+f(t)$$

的任一解的稳定性有以下结论:

1) 当 $\int_0^{+\infty}g(t)dt<+\infty$ 时，解是稳定的;

2) 当 $\int_0^{+\infty}g(t)dt=-\infty$ 时，解是渐近稳定的;

3) 当 $\int_0^{+\infty}g(t)dt=+\infty$ 时，解是不稳定的.

9．对于线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x$$

假设 $A(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 中是连续的，那末

1）当它的每一解在区间 $0\leqslant t\leqslant+\infty$ 中有界时，它的零解是稳定的；

2）当它的每一解满足

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=0$$

时，它的零解是渐近稳定的．

10．设方程组 $\frac{dx}{dt}=f(t,\ x)$ 的解 $x=\psi(t)$ 在区间 $0\leqslant t<+\infty$ 上存在，$f(t,\ x)$，$\frac{\partial f(t,\ x)}{\partial x_k}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$，$\|x\|<H$ 中连续．试叙述它在 $t_0\leqslant t<+\infty$（其中 t_0 是给定的正数）上按李雅普诺夫意义稳定的定义．并证明当 $\psi(t)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 上稳定时，$\psi(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上也是稳定的．

§4 李雅普诺夫的直接方法

在讨论微分方程的解的稳定性时，李雅普诺夫直接方法占重要的地位．这个方法的特点是：不去求方程组的解的表达式，而是作出李雅普诺夫函数（V 函数），利用方程本身来讨论解的稳定性．它对于那些难于求出解的表达式的非线性方程不论在理论上还是在应用上都是有效的．为了简单起见，我们只就自治方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(x) \tag{1}$$

的平衡位置 $x=0$ 的稳定性问题讲述这一方法．假设方程组 (1) 的右端 $f(x)$ 的分量 $f_1(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，$\cdots$，$f_n(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 在空间 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 的某一含有坐标原点的区域 G 中是连续的，并且有连续的一阶偏导数，$f(0)=0$．

一、预备知识

假设函数 $V(x)=V(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 在原点 O 的某一邻域中是连续可微的，并且 $V(0)=0$．

如果存在一个正数 h，使得当 $\|x\|\leqslant h$ 时成立着不等式

$$V(x)\geqslant 0\quad(\text{或}\leqslant 0),$$

就称 $V(\boldsymbol{x})$ 是常正的函数(或常负的函数)。常正和常负的函数统称为常号函数。

如果当 $0<\|\boldsymbol{x}\|\leqslant h$ 时成立着

$$V(\boldsymbol{x})>0 \quad (\text{或 } <0),$$

就称 $V(\boldsymbol{x})$ 是定正(或定负)函数。定正和定负函数统称为定号函数。

如果 $V(\boldsymbol{x})$ 在原点 O 的任一邻域中既可取到正值也可取到负值，就称 $V(\boldsymbol{x})$ 是变号函数。

下面的例子对于了解上述定义是有益的。

1° $V(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 是定正的；

2° $V(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+x_3^4$ 是定正的；

3° $V(x, y)=ax^2+2bxy+cy^2$，当 $a>0$，$b^2-ac<0$ 时是定正的；当 $a<0$，$b^2-ac<0$ 时是定负的；当 $b^2-ac>0$ 时是变号的；

4° $V(x, y)=\sin(x^2+y^2)$ 是定正的；

5° $V(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2$ 是常正的，但不是定正的。

对于二次型

$$V(\boldsymbol{x})=\sum_{k,l=1}^{n} c_{kl}x_kx_l \quad (c_{kl}=c_{lk}),$$

代数学已证明，如果系数矩阵 $C=(c_{kl})$ 的主子式都是正的，

$$c_{11}>0,\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}>0,\ \cdots,\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}>0,$$

那末 $V(\boldsymbol{x})$ 是定正的。

如果 $V(\boldsymbol{x})$ 不是二次型，我们怎样判断它的定号性呢？

引理 1　设

$$V(\boldsymbol{x})\equiv U(\boldsymbol{x})+W(\boldsymbol{x}),$$

而 $U(\boldsymbol{x})$ 是定正的二次型，在原点 O 的邻域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant h$ 中成立着

$$|W(\boldsymbol{x})|\leqslant A\|\boldsymbol{x}\|^{2+\delta}, \tag{2}$$

其中 A 和 δ 是正的常数，那末 $V(\boldsymbol{x})$ 是定正的。

证 因为 $U(\boldsymbol{x})$ 是定正的二次型，所以它在单位球面

$$\|\boldsymbol{x}\|=1$$

上有正的最小值 m. 从而

$$U(\boldsymbol{x})=U\left(\|\boldsymbol{x}\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)=\|\boldsymbol{x}\|^2U\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)\geqslant m\|\boldsymbol{x}\|^2.$$

由此，当 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant h$ 时，

$$V(\boldsymbol{x})\geqslant m\|\boldsymbol{x}\|^2-A\|\boldsymbol{x}\|^{2+\delta}=m\|\boldsymbol{x}\|^2\left(1-\frac{A}{m}\|\boldsymbol{x}\|^{\delta}\right),$$

若置 $h_1=\left(\dfrac{m}{2A}\right)^{\frac{1}{\delta}}$，那末当

$$\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\min(h,\ h_1)$$

时

$$V(\boldsymbol{x})\geqslant\frac{m}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2,$$

所以 $V(\boldsymbol{x})$ 是定正的函数.

同样可证，如果 $U(\boldsymbol{x})$ 是变号的二次函数，那末当 W 适合(2)时，$V(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{x})+W(\boldsymbol{x})$ 是变号函数. 请读者自行证明.

但是，如果 $U(\boldsymbol{x})$ 是常号的二次型，我们不能由 (2) 推知 $V=U+W$ 的常号性. 例如

$$U(x,\ y)=(x+y)^2\geqslant 0.$$

但

$$V(x,\ y)=(x+y)^2-x^3$$

和

$$V_1(x,\ y)=(x+y)^2+y^4$$

分别是变号函数和定正函数.

引理 2 如果函数 $V(\boldsymbol{x})$ 在球 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant h$ 上是连续的，$V(\mathbf{0})=0$，那末对任何正数 $l>0$，存在 $\alpha>0$，使得当 $V(\boldsymbol{x})\geqslant l$ 时成立着 $\|\boldsymbol{x}\|\geqslant\alpha$.

证 因为 $V(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 处连续，$V(\mathbf{0})=0$，所以对于 $l>0$，存在 $\alpha>0$，使得当 $\|\boldsymbol{x}\|<\alpha$ 时 $|V(\boldsymbol{x})|<l$. 因此，如果成立着 $V(\boldsymbol{x})\geqslant l$ 必导致 $\|\boldsymbol{x}\|\geqslant\alpha$.

引理 3 如果函数 $V(\boldsymbol{x})$ 在球 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant h$ 上是定正的，那末对于任一正数 $\alpha<h$，函数 $V(\boldsymbol{x})$ 在有界闭区域 $\alpha\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant h$ 上的最小值 m 大于 0.

下面讨论定正函数的几何意义(设 $n=2$).

设当 $0<x^2+y^2\leqslant h$ 时，$V(x, y)>0$，那末当 $C>0$ 充分小时，

$$V(x, y)=C$$

所确定的曲线有一支是环绕坐标原点 O 的闭曲线. 并且当 $C\to 0$ 时，这一族闭曲线收缩到坐标原点. 见图 5.12.

事实上，设 $V(x, y)$ 在圆周 $x^2+y^2=h^2$ 上的最小值为 m，那末 $m>0$；如果 $0<C<m$，设 P 是圆周 $x^2+y^2=h^2$ 上的任一点，L 是任一连结 O, P 两点的连续曲线. 由于 V 在坐标原点取值为 0，在 P 点的值大于等于 m，所以在 L 上必有点使 $V(x, y)=C$，这样 $V(x, y)=C$ 所确定的曲线必有一支是环绕坐标原点的闭曲线. 又根据引理 2，曲线 $V(x, y)=C$ 必收缩于坐标原点.

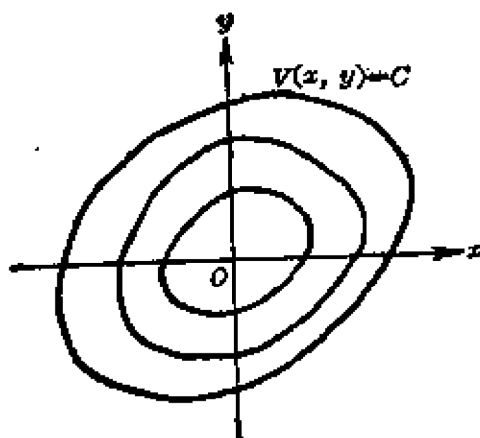


图　5.12

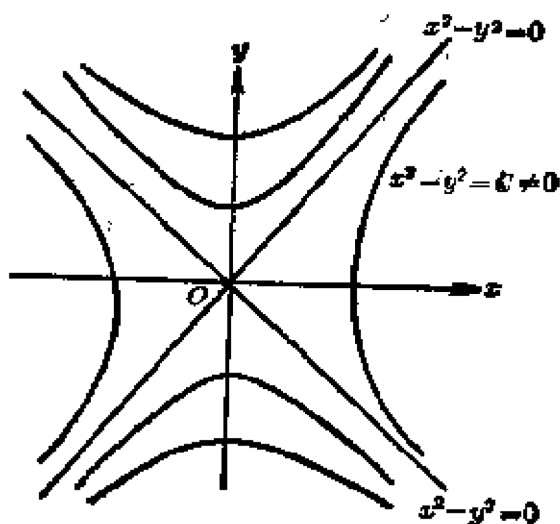


图　5.13

再看变号函数的几何意义.

设 $V(x, y)$ 是变号函数，那末 $V(x, y)=0$ 确定的曲线是含有坐标原点 O 的，并且可能由几个分支组成. 例如 $V(x, y)=x^2-y^2$，那末 $V(x, y)=0$ 是过原点 O 的两条直线，而 $V(x, y)=C$，即 $x^2-y^2=C$ 是以上述两条直线为渐近线的双曲线. 对于一般的变号函数 $V(x, y)$，在原点 O 的邻域中，必有使 $V(x, y)>0$ 的区域，也有使 $V(x, y)<0$ 的区域，而 $V(x, y)=0$ 的曲线是它们的边界. 见图 5.13.

二、李雅普诺夫直接方法的基本定理

对于方程组(1),在考察函数 $V(\boldsymbol{x})$ 的同时,还考察函数

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_k} f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n). \tag{3}$$

它在坐标原点的某一邻域中是连续的,并且当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时它的值是0,因此也可以讨论它的定号性、常号性或变号性. 由于它是由 V 联系到方程组(1)得到的,并且具有下面的性质,所以我们记它为 $\frac{dV}{dt}$.

设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t;\ 0,\ \boldsymbol{x}_0)$表示方程组(1)以$(0,\ \boldsymbol{x}_0)$为初值的解,即 $\boldsymbol{\varphi}(0,\ \boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$,那末当 $\boldsymbol{x}_0$ 固定时

$$V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ 0,\ \boldsymbol{x}_0))$$

是变量 t 的函数,并且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ 0,\ \boldsymbol{x}_0)) &\equiv \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ 0,\ \boldsymbol{x}_0))}{\partial x_k}\frac{d\varphi_k(t;\ 0,\ \boldsymbol{x}_0)}{dt}\\ &\equiv \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ 0,\ \boldsymbol{x}_0))}{\partial x_k}f_k(\boldsymbol{\varphi}(t;\ 0,\ \boldsymbol{x}_0)).\end{aligned} \tag{4}$$

特别,当 $t=0$ 时得到

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ 0,\ \boldsymbol{x}_0))\big|_{t=0}\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_k}f_k(\boldsymbol{x}_0).$$

因此,导数 $\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ 0,\ \boldsymbol{x}_0))$ 在 $t=0$ 处的值就是函数(3)在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处的值. 因此,我们称函数(3)是函数 $V(\boldsymbol{x})$ 按方程组(1)对时间 t 的全导数,并记为 $\frac{dV}{dt}$.

定理1 如果对于方程组(1),存在一个定正的函数 $V(\boldsymbol{x})$,使得 V 按方程组(1)对时间 t 的全导数

$$\frac{dV}{dt}\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_k}f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

是常负的,那末 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的.

证 在证明定理之前,先就 $n=2$ 的情形进行如下的几何解

释. 所谓 $x=0$ 是稳定的，就是对于 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得从圆 $\|x\|<\delta$ 内的点 x_0 出发的轨线不能跑出圆 $\|x\|\leqslant\varepsilon$ 外. 取 $C>0$ 充分小，使得由

$$V(x)=C$$

决定的闭曲线位在圆 $\|x\|<\varepsilon$ 内. 再作一个圆 $\|x\|<\delta$ 使得它位于 $V=C$ 的闭曲线内部. 对于 x_0，若 $\|x_0\|<\delta$，我们要证明从 x_0 出发的相轨线总在 $\|x\|<\varepsilon$ 中. 因为由(4)得

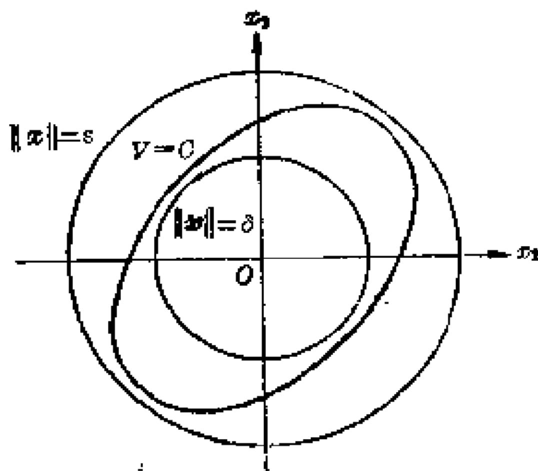


图　5.14

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t;\ 0,\ x_0))\leqslant 0,$$

从而当 $t\geqslant 0$ 时

$$V(\varphi(t;\ 0,\ x_0))\leqslant V(\varphi(0;\ 0,\ x_0))=V(x_0).$$

所以 $\varphi(t;\ 0,\ x_0)$ 在 $V=C$ 的内部. 从而 $\varphi(t;\ 0,\ x_0)$ 位在圆 $\|x\|<\varepsilon$ 中. 见图 5.14.

现给出该定理的分析证明.

设 $V(x)$ 和 $\frac{dV}{dt}$ 在 $\|x\|\leqslant h$ 上是定正的和常负的. 对于正数 ε，在有界闭区域 $\varepsilon\leqslant\|x\|\leqslant h$ 上函数 $V(x)$ 的最小值 m 是正的.

由于 $V(0)=0$，且 V 是连续的，所以存在 $\delta>0(\delta<\varepsilon)$，使得当 $\|x\|<\delta$ 时

$$0\leqslant V(x)<m.$$

现在证明，当 $\|x_0\|<\delta$ 时，方程组(1)的以 $(t_0,\ x_0)$ 为初值的解 $x=\varphi(t;t_0,\ x_0)$ 在区间 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中存在，并且成立着不等式

$$\|\varphi(t;\ t_0,\ x_0)\|<\varepsilon\quad(t_0\leqslant t<+\infty).\tag{5}$$

事实上，当 $t=t_0$ 时有

$$\|\varphi(t_0;\ t_0,\ x_0)\|=\|x_0\|<\delta<\varepsilon,$$

所以(5)当 $t=t_0$ 时成立. 如果 $\varphi(t;\ t_0\ x_0)$ 不是在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中存

在，或者(5)不成立，那末必存在 $t_1>t_0$ 使得当 $t_0\leqslant t<t_1$ 时不等式(5)成立，而 $t=t_1$ 时不成立，即

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t_1;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)\|=\varepsilon. \tag{6}$$

由于当 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 时 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 是方程组(1)的解，所以

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\leqslant 0,$$

从而 $$V(\boldsymbol{\varphi}(t_1;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\leqslant V(\boldsymbol{\varphi}(t_0;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))=V(\boldsymbol{x}_0)<m.$$

根据 m 的定义得

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t_1;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon,$$

它与(6)矛盾．因此，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中存在，且不等式(5)成立．即得证 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的．

定理2 如果对于方程组(1)存在定正函数 $V(\boldsymbol{x})$，使得它按方程组(1)对时间 t 的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 是定负的，那末方程组(1)的零解是渐近稳定的．

证 根据定理1，方程组(1)的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的．需要证明的是：存在 $\sigma>0$，使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\sigma$ 时，

$$\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}. \tag{7}$$

设 V 和 $-\frac{dV}{dt}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant h$ 上是定正的．根据定理1，对于 h，存在 $\sigma>0$，使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\sigma$ 时，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中存在，并且

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)\|<h\quad(t_0\leqslant t<+\infty),$$

因此，当 $t_0\leqslant t<+\infty$ 时

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\leqslant 0.$$

从而 $V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))$ 是 t 的单调不增函数，且 $V\geqslant 0$，所以当 $t\to+\infty$ 时 $V(\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\ \boldsymbol{x}_0))$ 有极限 $a\geqslant 0$．

如果 $a>0$，那末

$$V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\geqslant a>0,$$

根据引理2，存在 $\alpha>0$ 使得

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)\|\geqslant\alpha.$$

但 $\dfrac{dV}{dt}$ 是定负的，所以根据引理 3 存在正数 m，使得

$$-\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\geqslant m,$$

从而 $$0\leqslant V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\leqslant V(\boldsymbol{x}_0)-m(t-t_0).$$

上式右端当 $t\to+\infty$ 时趋于 $-\infty$，这与 V 的定正性矛盾．所以 $a>0$ 不成立，即 $a=0$，因此

$$\lim_{t\to+\infty}V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))=0. \tag{8}$$

再证明(7)成立．否则，存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$，$t_k\to+\infty$，使得 $\|\boldsymbol{\varphi}(t_k;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|\geqslant\varepsilon_0>0$．由引理 3 得 $V(\boldsymbol{\varphi}(t_k;t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\geqslant m_0>0$．它与(8)矛盾．因此，得证等式(7)．即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的．

定理 3　如果对于方程组 (1)，存在一个函数 V，它按方程组 (1) 对时间 t 的全导数 $\dfrac{dV}{dt}$ 是定正的，且在坐标原点的任一邻域内，函数 V 总能取到正值，那末方程组 (1) 的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的．

证　设 $\dfrac{dV}{dt}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant h$ 上是定正的．我们要证明，对任何 $\delta>0$，在 $\|\boldsymbol{x}\|<\delta$ 内存在 $\boldsymbol{x}_0$，使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$不能总在球 $\|\boldsymbol{x}\|<h$ 内．

事实上，取 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 且 $V(\boldsymbol{x}_0)>0$，如果 $\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|<h$ 内，由于

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\geqslant 0,$$

所以当 $t_0\leqslant t<+\infty$ 时

$$V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\geqslant V(\boldsymbol{x}_0)>0,$$

根据引理 2，存在 $\lambda>0$ 使得

$$h\geqslant\|\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)\|\geqslant\lambda>0.$$

从而由引理 3，存在 $m>0$ 使得

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\geqslant m>0,$$

因此，当 $t_0\leqslant t<+\infty$ 时

$$V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\geqslant m(t-t_0)+V(\boldsymbol{x}_0).$$

上式右端当 $t\to+\infty$ 时趋于 $+\infty$，这与 $\|\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)\|\leqslant h$ 矛盾. 所以，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

定理 4 如果对于方程组 (1)，存在一个函数 V，使得当 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant h$ 时

$$\frac{dV}{dt}\geqslant\lambda V,$$

其中 λ 是正的常数，并且 V 在原点的任一邻域内总能取到正值，那末方程组 (1) 的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

证 对任何 $\delta>0$，取 $\boldsymbol{x}_0$ 满足

$$\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta,\ V(\boldsymbol{x}_0)>0.$$

我们要证 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中不能总在球 $\|\boldsymbol{x}\|<h$ 内.

不然的话，由于 $\|\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)\|<h$，所以

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))-\lambda V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\geqslant 0,$$

从而当 $t_0\leqslant t<+\infty$ 时

$$\frac{d}{dt}\{e^{-\lambda t}V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\}\geqslant 0,$$

因此
$$e^{-\lambda t}V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))-e^{-\lambda t_0}V(\boldsymbol{x}_0)\geqslant 0,$$

即
$$V(\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0))\geqslant e^{\lambda(t-t_0)}V(\boldsymbol{x}_0).$$

上式右端当 $t\to+\infty$ 时趋于 $+\infty$，它与 $\|\boldsymbol{\varphi}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)\|<h$ 相矛盾. 所以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

[例 1] 讨论方程

$$\frac{dx}{dt}=ax+bx^2$$

的零解 $x=0$ 的稳定性.

取 $V(x)=x^2$，它是定正的，而

$$\frac{dV}{dt}=2x(ax+bx^2)=2ax^2+2bx^3,$$

1) 当 $a<0$ 时，$\frac{dV}{dt}$ 是定负的，$x=0$ 是渐近稳定的；

2) 当 $a>0$ 时，$\frac{dV}{dt}$ 是定正的，$x=0$ 是不稳定的；

3) 当 $a=0$, $b\neq 0$ 时，原来的 V 不能应用了。我们取

$$\tilde{V}(x)=x,$$

它是变号的，并且

$$\frac{d\tilde{V}}{dt}=bx^2,$$

它是定号的，因此 $x=0$ 是不稳定的.

[例 2]　讨论无阻尼的单摆运动方程

$$\frac{dx}{dt}=y,$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin x$$

的零解 $x=y=0$ 的稳定性.

取
$$V(x, y)=y^2+\frac{4g}{l}\sin^2\frac{x}{2},$$

那末它是正定的，并且

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4g}{l}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot y-2y\frac{g}{l}\sin x\equiv 0,$$

所以零解是稳定的，但 $V(x(t), y(t))\equiv V(x_0, y_0)$，所以零解不是渐近稳定的.

定理 1 至定理 4 指出，如果具有某种性质的函数 V，就可以据此判断方程组(1)的零解是稳定的，渐近稳定的或不稳定的．但具体构造出李雅普诺夫函数 V 是一个困难问题．反之，如果方程组(1)的零解具有某种稳定性，例如是渐近稳定的，是否存在满足定理 2 条件的 V 函数呢？这是所谓逆定理，该问题已经完整地解决了．我们这里就线性常系数微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x} \tag{9}$$

来讨论这一问题.

假设 A 的特征值都具有负的实数部分，那末 (9) 的零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是渐近稳定的. 现在要证明，存在二次型

$$V(\boldsymbol{x})=\langle H\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle=\sum_{k,l=1}^{n} h_{kl}x_k x_l,$$

这里 $H=(h_{kl})$ 是对称矩阵，使得 $V(\boldsymbol{x})$ 是定正的，而

$$\frac{dV}{dt}=\langle HA\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle+\langle H\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}\rangle=\langle (A^T H+HA)\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle$$

是定负的.

事实上，置

$$H=\int_0^{+\infty} e^{A^T s}e^{As}ds, \tag{10}$$

那末 H 满足所要求的性质.

首先，因为 A 的特征值的实部都小于 0，所以 A^T 的特征值的实部都小于 0，并且存在常数 $M>0$，$\alpha>0$ 使得

$$\|e^{As}\|\leqslant Me^{-\alpha s}\quad (0\leqslant s<+\infty),$$
$$\|e^{A^T s}\|\leqslant Me^{-\alpha s}\quad (0\leqslant s<+\infty).$$

由此，(10)的右端的积分存在，并且

$$H^T=\int_0^{+\infty}(e^{A^T s}e^{As})^T ds=H.$$

即 H 是对称矩阵. 又对于 $\boldsymbol{x}\neq 0$，有

$$\langle H\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle=\int_0^{+\infty}\langle e^{A^T s}e^{As}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle ds=\int_0^{+\infty}\langle e^{As}\boldsymbol{x},\ e^{As}\boldsymbol{x}\rangle ds$$
$$=\int_0^{+\infty}\|e^{As}\boldsymbol{x}\|^2 ds>0,$$

所以 $V=\langle H\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle$ 是定正的.

其次，(9) 以 $(0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 为初值的解是 $\boldsymbol{x}=e^{At}\boldsymbol{x}_0$. 因此

$$V(e^{At}\boldsymbol{x}_0)=\langle He^{At}\boldsymbol{x}_0,\ e^{At}\boldsymbol{x}_0\rangle$$
$$=\int_0^{+\infty}\|e^{As}e^{At}\boldsymbol{x}_0\|^2 ds=\int_0^{+\infty}\|e^{A(s+t)}\boldsymbol{x}_0\|^2 ds.$$

若置 $\tau=s+t$，那末由上式得

$$V(e^{At}\boldsymbol{x}_0)=\int_t^{+\infty}\|e^{A\tau}\boldsymbol{x}_0\|^2 d\tau,$$

所以
$$\frac{d}{dt}V(e^{At}\boldsymbol{x}_0)\equiv-\|e^{At}\boldsymbol{x}_0\|^2,$$
特别当 $t=0$ 时得到
$$\frac{dV(\boldsymbol{x}_0)}{dt}\equiv-\|\boldsymbol{x}_0\|^2, \tag{11}$$
即 $\frac{dV}{dt}$ 是定负的.

因此，当 A 的特征值的实部都小于0，即方程组(1)的零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 渐近稳定时，存在 V 具有性质:
$$V(\boldsymbol{x})=\langle H\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle>0\quad(\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}),$$
$$\frac{dV}{dt}<0\quad(\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}).$$
即存在正定的对称矩阵 H 满足
$$A^TH+HA=-I, \tag{12}$$
这里 I 是 n 阶单位阵.

(12) 完全是一个代数问题．它应当有一个代数学的证明.

如果 A 是对角矩阵
$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \mathbf{0}\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$
那末(12)成为
$$\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n}\\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \mathbf{0}\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \mathbf{0}\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n}\\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn}\end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix}1 & & & \mathbf{0}\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1\end{pmatrix}.$$

因此 $2\lambda_1 h_{11}=-1,\ (\lambda_1+\lambda_2)h_{12}=0,\ \cdots,\ (\lambda_1+\lambda_n)h_{1n}=0,$

$$2\lambda_2 h_{22}=-1,\ \cdots,\quad (\lambda_2+\lambda_n)h_{2n}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\lambda_n h_{nn}=-1,$$

从而
$$h_{kl}=\begin{cases}0 & \text{当 } k\neq l \text{ 时},\\ -\dfrac{1}{2\lambda_k} & \text{当 } k=l \text{ 时},\end{cases}$$

即
$$V(x)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{\lambda_k}.$$

如果 $\lambda_k<0\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，那末 $V(x)$ 是定正的，而

$$\frac{dV}{dt}=-\sum_{k=1}^{n}x_k^2.$$

对于一般的矩阵 A，我们有下述李雅普诺夫定理。

定理 5 如果矩阵 A 的特征值 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ 适合要求

$$\lambda_k+\lambda_l\neq 0\quad (k,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

那末，对任何 n 阶对称方阵 D，存在唯一的对称矩阵 H 满足关系

$$A^T H+HA=-D. \tag{13}$$

证 根据线性代数的许尔(Schur)定理，存在满秩矩阵 S，使得 $S^{-1}AS$ 呈三角型，即

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

以 S^T 左乘，S 右乘关系式(13)的两端，得到

$$S^T HS\cdot S^{-1}AS+(S^{-1}AS)^T S^T HS=-S^T DS,$$

若记 $S^T HS=(g_{kl})$，$S^T DS=(c_{kl})$，那末上式成为

$$\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n}\\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$
+\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{12} & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
=-\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}. \tag{14}
$$

把它展开就得关于 $g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{1n}, g_{22}, \cdots, g_{2n}, \cdots, g_{nn}$ 共 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个未知量的线性代数方程组

$$
\begin{gathered}
(\lambda_1+\lambda_1)g_{11}=-c_{11},\\
b_{12}g_{11}+(\lambda_1+\lambda_2)g_{12}=-c_{12},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_{1n}g_{11}+b_{2n}g_{12}+\cdots+b_{n-1,n}g_{n-1,n}+(\lambda_1+\lambda_n)g_{1n}=-c_{1n},\\
(b_{12}+b_{12})g_{12}+(\lambda_2+\lambda_2)g_{22}=-c_{22},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2b_{1n}g_{1n}+2b_{2n}g_{2n}+\cdots+2b_{n-1,n}g_{n-1,n}+(\lambda_n+\lambda_n)g_{nn}=-c_{nn},
\end{gathered}
$$

它的系数行列式 $\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=k}^{n}(\lambda_k+\lambda_l)$ 不为零，所以由上式可唯一地确定 g_{kl}，即由(14)可唯一地决定 G．由于 $H=(S^T)^{-1}GS^{-1}$，所以对任何 n 阶对称矩阵 D，存在对称矩阵 $H=(h_{kl})$ 满足关系(13)．根据线性代数方程组的理论知，作为 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个未知量 h_{kl} 的方程组(13)的系数行列式不为 0，从而存在唯一对称矩阵 H 满足关系式(13)。

当 A 和 D 都是实矩阵时，由(13)得

$$
\overline{H}A+A^T\overline{H}=-D,
$$

所以 $\overline{H}=H$，即 H 是实对称矩阵．

该证明摘自 1955 年发表在 Math. Nachr. 14, 349～354 上的 W. Hahn 的一篇短文．

特别，当 A 的特征值都具有负实部时，定理的条件成立，所以

存在对称矩阵 H 满足关系式

$$HA+A^TH=-I. \tag{15}$$

剩下来应证明 H 是正定矩阵. 首先, 若存在 x_0 使得

$$\langle Hx_0, x_0\rangle<0,$$

那末根据李雅普诺夫定理 3, 方程组 (9) 的零解是不稳定的, 它与 A 的特征值都具负实部相矛盾. 因此 $H\geqslant 0$. 其次, 若存在 $x_0\neq 0$ 使得 $\langle Hx_0, x_0\rangle=0$, 那末由 $H\geqslant 0$ 知

$$\langle H(x_0+\mu x), x_0+\mu x\rangle\geqslant 0$$

对任何 x 及实数 μ 成立. 从而由 $\langle Hx_0, x_0\rangle=0$ 得

$$2\mu\langle Hx_0, x\rangle+\mu^2\langle Hx, x\rangle\geqslant 0$$

对任何实数 μ 成立. 由上式得 $\langle Hx_0, x\rangle=0$, 特别当 $x=Hx_0$ 时得 $\langle Hx_0, Hx_0\rangle=0$, 即 $Hx_0=0$. 再由(15)式得

$$x_0^THAx_0+x_0^TA^THx_0=-x_0^Tx_0=-\|x_0\|^2<0.$$

但上式左端因 $Hx_0=0$ 而等于 0, 得到矛盾. 因此, 当 A 的特征值都具负实部时, 满足(15)的对称矩阵 H 必是正定的.

反之, 若 H 适合(15), 就可对方程组(9)的解进行估计.

事实上, 假设 H 是正定的, 那末存在常数 $m>0$, $M>0$ 使得

$$m\langle x, x\rangle\leqslant\langle Hx, x\rangle\leqslant M\langle x, x\rangle,$$

即
$$m\|x\|^2\leqslant\langle Hx, x\rangle\leqslant M\|x\|^2.$$

由于
$$\frac{dV}{dt}=-\|x\|^2\leqslant-\frac{1}{M}\langle Hx, x\rangle=-\frac{1}{M}V,$$

即
$$\frac{d}{dt}V(e^{At}x_0)\leqslant-\frac{1}{M}V(e^{At}x_0),$$

所以
$$\frac{d}{dt}\{V(e^{At}x_0)e^{\frac{t}{M}}\}\leqslant 0,$$

从而当 $0\leqslant t<+\infty$ 时,

$$V(e^{At}x_0)e^{\frac{t}{M}}-V(x_0)\leqslant 0,$$

即
$$V(e^{At}x_0)\leqslant V(x_0)e^{-\frac{t}{M}}\quad(0\leqslant t<+\infty),$$

于是
$$\begin{aligned}m\|e^{At}x_0\|^2&\leqslant\langle He^{At}x_0, e^{At}x_0\rangle\\&\leqslant\langle Hx_0, x_0\rangle e^{-\frac{t}{M}}\leqslant M\|x_0\|^2e^{-\frac{t}{M}},\end{aligned}$$

即当 $0\leqslant t<+\infty$ 时

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t;\ \boldsymbol{x}_0)\|=\|e^{At}\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\sqrt{\frac{M}{m}}\|\boldsymbol{x}_0\|e^{-\frac{t}{2M}}.$$

因此，A 的特征值都具有负实部。

习　　题

1．设 $V(\boldsymbol{x})=\langle H\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle$ 是定正的，它按方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}$$

对时间 t 的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 是定负的，试证方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的，其中 $\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|=O(\|\boldsymbol{x}\|^2)$。

2．确定方程组

$$\frac{dx}{dt}=my,\quad \frac{dy}{dt}=-mx$$

的奇点及其类型，其中 m 是常数．由此找出方程组

$$\frac{dx}{dt}=my+\alpha x(x^2+y^2),$$

$$\frac{dy}{dt}=-mx+\alpha y(x^2+y^2)$$

的 V 函数，从而讨论它的零解的稳定性。

3．确定方程组

$$\frac{dx}{dt}=-y+(x-1)^3,$$

$$\frac{dy}{dt}=x-1+y^3$$

的平衡位置，并讨论它的稳定性。

4．对于非自治微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x}),\tag{*}$$

假设 $\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x})$ 在 $[0,\ +\infty)\times G$ 中是连续的，关于 $\boldsymbol{x}$ 是连续可微的，$\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{0})\equiv\boldsymbol{0}$．如果存在定正的函数 $V(\boldsymbol{x})$，它按方程组 (*) 对时间 t 的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 满足

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_k}f_k(t,\ \boldsymbol{x})\leqslant-\lambda(t)V(\boldsymbol{x}),$$

并且 $\lambda(t)\geqslant 0$, $\int_0^{+\infty}\lambda(t)dt=+\infty$, 试证方程组(*)的零解是渐近稳定的.

5. 试求方程组

$$\frac{dx}{dt}=y+2y^3,\quad \frac{dy}{dt}=-x-2x^3$$

的相轨线, 并由此讨论它的零解的稳定性.

6. 讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=y-3z-x(x+y-2z)^2,$$

$$\frac{dy}{dt}=2x+3z-y(x-y+z)^2,$$

$$\frac{dz}{dt}=2x-y-z$$

的零解的稳定性.

7. 假设线性方程组

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x+\beta y,\quad \frac{dy}{dt}=\gamma x+\delta y$$

的系数矩阵的特征值都具有负的实数部分. 试找出一个二次型 $V(x, y)$, 使其按方程组对时间 t 的全导数 $\frac{dV}{dt}=-x^2-y^2$, 并由 V 的性质讨论方程组的零解的稳定性.

8. 试用李雅普诺夫直接方法讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=x+2y,\quad \frac{dy}{dt}=-2x$$

的零解的稳定性

9. 试用李雅普诺夫直接方法讨论方程

$$\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}-2x=0$$

的零解的稳定性.

10. 试用李雅普诺夫直接方法讨论具有阻尼的单摆运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+b\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

的零解的稳定性, 这里 l 和 b 是正的常数, g 是重力加速度.

11. 讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=-x-y+z-1+(x-1)[(x-1)^2+y^2+(z-2)^2],$$

$$\frac{dy}{dt}=-x-2y+2z-5+y[(x-1)^2+y^2+(z-2)^2],$$

$$\frac{dz}{dt}=x+2y+z-3+(z-2)[(x-1)^2+y^2+(z-2)^2]$$

的解 $x=1,\ y=0,\ z=2$ 的稳定性[提示：$V=(x-1)^2+y^2-(z-2)^2$].

12．试用李雅普诺夫直接方法讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}y+(x-1)[(x-1)^2+y^2],$$

$$\frac{dy}{dt}=-2+2x+y[(x-1)^2+y^2]$$

的解 $x=1,\ y=0$ 的稳定性.

13．设 $U(\boldsymbol{x})$ 是变号的二次型，$W(\boldsymbol{x})=O(\|\boldsymbol{x}\|^{2+\delta})\ (\delta>0)$，试证 $V(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{x})+W(\boldsymbol{x})$ 是变号的.

§5　一次近似理论

在非线性微分方程

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\quad(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}) \tag{1}$$

的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的稳定性讨论中，李雅普诺夫直接方法是有效的；但是求 V 函数是十分困难的问题．因此，人们往往采用一次近似方法来进行讨论.

假设 $\boldsymbol{f}$ 在坐标原点 O 的某一邻域内有连续的二阶偏导数，那末

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

其中　　$$g_k(x_1,\ \cdots,\ x_n)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_k(\theta_k\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial x_j}x_ix_j,$$

而 $0<\theta_k<1$．显然

$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|=O(\|\boldsymbol{x}\|^2).$$

我们称线性方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x} \tag{3}$$

是方程组(2)的一次近似方程．自然要问，能否由方程组(3)的零解的稳定性讨论非线性方程组(2)的零解的稳定性呢？一次近似理

论就是回答这一问题的。

定理1 如果线性方程组 (3) 的零解 $x=0$ 是渐近稳定的，那末(2)的零解也是渐近稳定的。

证 由于 (3) 的零解是渐近稳定的，所以 A 的特征值都具有负实部。根据 §4 的定理5，存在定正的函数

$$V(x)=\langle Hx, x\rangle,$$

而 V 按方程组(3)对时间 t 的全导数

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3)}=\langle(A^TH+HA)x, x\rangle=-\|x\|^2.$$

现考虑 V 按方程组(2)对时间 t 的全导数

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2)}=-\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_k}g_k(x).$$

由于 $\frac{\partial V}{\partial x_k}$ 是 x 的线性函数，$g_k(x)=O(\|x\|^2)$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_k}g_k(x)=O(\|x\|^3).$$

再根据 §4 的引理1得到 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2)}$ 是定负的，所以方程组 (2) 的零解是渐近稳定的。

定理2 如果线性方程组 (3) 的系数矩阵 A 的特征值至少有一个实部大于0，那末方程组(2)的零解是不稳定的。

证 我们仅就 A 的特征值都不具有零实部的情形进行证明。设 A 有 r 个实部大于0的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$；$n-r$ 个实部小于0的特征值 $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \cdots, \lambda_n$，在这里我们把 l 重特征值算为 l 个特征值。

根据线性代数的理论，存在实的满秩矩阵 S 使得

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix},$$

其中 A_1 是 r 阶方阵，特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$；$A_2$ 是 $n-r$ 阶方阵，特征值为 $\lambda_{r+1}, \cdots, \lambda_n$。

对系统(2)进行线性变换

$$\boldsymbol{x}=S\boldsymbol{y},$$

得到
$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=S^{-1}AS\boldsymbol{y}+S^{-1}\boldsymbol{g}(S\boldsymbol{y}),$$
即
$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{y}^1}{dt}&=A_1\boldsymbol{y}^1+\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^2),\\ \frac{d\boldsymbol{y}^2}{dt}&=A_2\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^2),\end{aligned}\tag{4}$$
其中 $\boldsymbol{y}^1$, $\boldsymbol{y}^2$ 分别为 r 维和 $n-r$ 维向量,而
$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}^1\\ \boldsymbol{y}^2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^2)\\ \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^2)\end{pmatrix}=O(\|\boldsymbol{y}\|^2).$$

对于方阵 $-A_1$, 它的特征值 $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $\cdots$, $-\lambda_r$ 的实部全是负的,所以根据 §4 的定理 5, 存在正定的 r 阶对称方阵 H_1, 满足关系
$$-A_1^TH_1+H_1(-A_1)=-I_1,$$
其中 I_1 是 r 阶单位阵,即
$$A_1^TH_1+H_1A_1=I_1.\tag{5}$$
同样,存在 $n-r$ 阶正定的对称方阵 H_2, 满足关系
$$A_2^TH_2+H_2A_2=-I_2,\tag{6}$$
其中 I_2 是 $n-r$ 阶单位阵.

置　　$V(\boldsymbol{y})=\langle H_1\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^1\rangle-\langle H_2\boldsymbol{y}^2,\ \boldsymbol{y}^2\rangle,$

它在 $\boldsymbol{y}$ 的坐标原点的任一邻域内可取到正值. 而它按方程组 (4) 对时间 t 的全导数
$$\begin{aligned}\frac{dV(\boldsymbol{y})}{dt}&=\langle H_1(A_1\boldsymbol{y}^1+\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^2)),\ \boldsymbol{y}^1\rangle\\ &\quad+\langle H_1\boldsymbol{y}^1,\ A_1\boldsymbol{y}^1+\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^2)\rangle\\ &\quad-\langle H_2(A_2\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^2)),\ \boldsymbol{y}^2\rangle\\ &\quad-\langle H_2\boldsymbol{y}^2,\ A_2\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^2)\rangle\\ &=\langle(A_1^TH_1+H_1A_1)\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^1\rangle\\ &\quad-\langle(A_2^TH_2+H_2A_2)\boldsymbol{y}^2,\ \boldsymbol{y}^2\rangle\\ &\quad+\langle H_1\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^2)\rangle\\ &\quad-\langle H_2\boldsymbol{y}^2,\ \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^2)\rangle.\end{aligned}$$

根据等式(5)和(6)，由上式得到

$$\frac{dV(\boldsymbol{y})}{dt}=\langle \boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^1\rangle+\langle \boldsymbol{y}^2,\ \boldsymbol{y}^2\rangle+O(\|\boldsymbol{y}\|^3)$$
$$=\|\boldsymbol{y}\|^2+O(\|\boldsymbol{y}\|^3).$$

根据§4定理5知 $\dfrac{dV(\boldsymbol{y})}{dt}$ 是定正的．因此，方程组(4)的零解是不稳定的．从而，方程组(2)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的．

[例1] 讨论具有阻尼的单摆运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+b\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

的解 $\varphi\equiv0$ 和 $\varphi\equiv\pi$ 的稳定性．

置 $x=\varphi,\ y=\dfrac{d\varphi}{dt}$，得到

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=y,\\&\frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin x-by.\end{aligned}\tag{7}$$

它在(0, 0)附近的一次近似方程是

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}x-by,$$

而系数矩阵的特征方程是

$$\lambda^2+b\lambda+\frac{g}{l}=0,$$

所以特征值都具有负实部，从而方程组(7)的零解是渐近稳定的．

为考察方程组(7)的平衡位置 $x=\pi,\ y=0$ 的稳定性，引进变换

$$\tilde{x}=x-\pi,\quad \tilde{y}=y,$$

得到

$$\begin{aligned}&\frac{d\tilde{x}}{dt}=\tilde{y},\\&\frac{d\tilde{y}}{dt}=\frac{g}{l}\sin\tilde{x}-b\tilde{y},\end{aligned}\tag{8}$$

它的一次近似的特征方程是

$$\lambda^2+b\lambda-\frac{g}{l}=0,$$

有一个正实根，一个负实根，所以方程组(8)的零解是不稳定的，即方程组(7)的平衡位置 $x=\pi$, $y=0$ 是不稳定的。

[例 2] 讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=-2x+y-z+x^2,$$

$$\frac{dy}{dt}=x-y+xy,$$

$$\frac{dz}{dt}=x+y-z+z^2$$

的零解 $x=y=z=0$ 的稳定性。

该方程组一次近似的特征方程是

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & 1\\ -1 & \lambda+1 & 0\\ -1 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+3=0. \tag{9}$$

首先，当 $\lambda\geqslant 0$ 时，$\Delta(\lambda)\geqslant 3>0$，所以(9)没有非负的实根。

其次，如果 $\lambda=\alpha+i\beta(\beta\neq 0)$ 是(9)的复根，那末

$$\alpha^3-3\alpha\beta^2+4(\alpha^2-\beta^2)+5\alpha+3=0, \tag{10}$$

$$3\alpha^2\beta-\beta^3+8\alpha\beta+5\beta=0. \tag{11}$$

由于 $\beta\neq 0$，从(11)得

$$\beta^2=3\alpha^2+8\alpha+5,$$

代入(10)得 $$-8\alpha^3-32\alpha^2-42\alpha-17=0.$$

当 $\alpha\geqslant 0$ 时，上式不可能成立。所以 $\alpha<0$。

这就是说，(9) 的根都在左半平面。因此，方程组的零解是渐近稳定的。

关于判断多项式的根都在左半平面的问题，是一个重要问题。路斯 (Routh) 和霍尔维茨 (Hurwitz) 给出了解决该问题的充分必要条件。利用例 2 的步骤可以证明，实系数三次多项式

$$a_0\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0 \quad (a_0>0)$$

的根全在左半平面的充分必要条件是

$$a_1>0,\ a_2>0,\ a_3>0,\ a_1a_2>a_0a_3.$$

[例 3] 讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=-x-y+z+xyz,$$
$$\frac{dy}{dt}=x-2y+2z+z^3,$$
$$\frac{dz}{dt}=x+2y+z+xz$$

的零解的稳定性.

该方程组的一次近似方程的特征方程是

$$\Delta(\lambda)\equiv\lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-9=0.$$

因为 $\Delta(0)=-9<0$, $\Delta(3)=21>0$, 所以上式必有正根，从而方程组的零解是不稳定的.

习　　题

1．方程 $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{1+t}x+x^2$ 在 $x=0$ 附近的一次近似方程是 $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{1+t}x$. 试讨论原方程及一次近似方程的零解的稳定性.

2．试讨论方程 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+1}x-x^3$ 和一次近似方程 $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{1+t}$ 的零解的稳定性.

3．试找出方程组

$$\frac{dx}{dt}=y+x^3,\quad \frac{dy}{dt}=-2(x+y)+y^3$$

的 V 函数，并讨论它的零解的稳定性.

4．试用李雅普诺夫直接方法讨论下列方程组的零解的稳定性：

1) $\frac{dx}{dt}=\sin(x+y),\quad \frac{dy}{dt}=-\ln(1+y)$;

2) $\frac{dx}{dt}=1-e^{x+y},\qquad \frac{dy}{dt}=-e^x\operatorname{tg}y$.

5．讨论下列方程组的零解的稳定性：

1) $\frac{dx}{dt}=y+x^2,\quad \frac{dy}{dt}=z+y^2,\quad \frac{d^2z}{dt^2}+2\frac{dz}{dt}=-x-2y-3z+z^2$;

2) $\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=\sin(x+y)$;

3) $\frac{dx}{dt}=\ln(1+x+y),\quad \frac{dy}{dt}=x-y-x^2$;

4) $\frac{dx}{dt}=e^x\sin y+\sin x+e^z-1,\quad \frac{dy}{dt}=\sin(x+y)$,

$$\frac{dz}{dt}=\operatorname{tg}(x+z).$$

6．讨论刚体绕固定点转动的方程组

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=0,$$
$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=0,$$
$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=0$$

的解 $p=\omega>0$, $q=r=0$ 的稳定性，其中 ω、A、B 和 C 是正的常数，且 $C<A<B$ 或 $C>A>B$。

第 六 章

一阶偏微分方程

§1 引　论

如果微分方程中的未知函数是几个（多于一个）自变量的函数，我们就称这方程为*偏微分方程*. 物理、力学的许多问题归结为偏微分方程的问题. 我们在这一章中将介绍一阶偏微分方程的理论，它和分析力学、变分学、微分几何学等有密切的关系.

含有两个自变量的一阶偏微分方程可以写为

$$F(x, y, z, p, q)=0, \tag{1}$$

这里 x 和 y 是自变量，z 是未知函数，$p=\frac{\partial z}{\partial x}$，$q=\frac{\partial z}{\partial y}$. 假设五个变量 x, y, z, p, q 的函数 $F(x, y, z, p, q)$ 在五维空间的某一区域 G 内给定，且是连续的，并且 $\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2\neq 0$，也就是说(1)中的确含有 p 或 q. 假如把在平面 (x, y) 的某一区域 D 内有定义的连续可微函数

$$z=\varphi(x, y) \tag{2}$$

代入方程(1)，得到关于 $(x, y)\in D$ 的恒等式

$$F\left(x, y, \varphi(x, y), \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\right)\equiv 0,$$

那末我们称函数 $z=\varphi(x, y)$ 是方程(1)的一个解，而称区域 D 为这个解的定义域. 由于 $z=\varphi(x, y)$ 在三维空间 (x, y, z) 中代表一个曲面，我们也称解(2)是方程(1)的*积分曲面*.

例如，讨论方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x+y,$$

容易验证，$z=\frac{1}{2}x^2+xy+\varphi(y)$ 是它的解，这里 $\varphi(y)$ 是 y 的任一连续可微函数。

又如，讨论方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y},\tag{3}$$

作变换 $x+y=\xi$, $x-y=\eta$, 那末 $x=\frac{1}{2}(\xi+\eta)$, $y=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$,

$$\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.\tag{4}$$

因此 $z=w(\xi)$ 是方程(4)的解，这里 $w(\xi)$ 是变量 ξ 的任一连续可微函数。所以

$$z=w(x+y)$$

是方程(3)的解。

我们知道常微分方程的解含有一些任意常数，从上面两个例子中可以看到，偏微分方程的解可以含有一个任意函数，这是与常微分方程不同之点。

然而，偏微分方程和常微分方程的区别不仅在于此；它们的重要区别在于，对于一个变量的函数，成立着牛顿-莱布尼兹公式，即积分和微分互为逆运算，因而求解常微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x)$$

的问题，常可化为求解积分方程

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau, x(\tau))d\tau$$

的问题，这样就可以用逐次逼近法证明它的解的存在性以及近似地求它的解；但对于多个变量的函数，一般并不存在类似于牛顿-莱布尼兹公式的关系式，因而求解偏微分方程的问题一般不能化为求解积分方程来讨论。所以类似于常微分方程证明解的存在性定理的方法很难移到偏微分方程方面来。

尽管如此，对于一阶偏微分方程，虽然一般不能直接求解，但它和常微分方程有密切的关系，我们这一章的目的也就是阐明一

阶偏微分方程和一阶常微分方程组的关系。

在第一章讨论常微分方程组

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)\end{array}\right\}\tag{5}$$

的首次积分时，曾经指出，如果函数$\varphi(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$是方程组(5)的首次积分，那末$z=\varphi(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$是线性齐次偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial t}+f_1(t,x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+f_n(t,x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}=0 \tag{6}$$

的解；反之，假若$z=\varphi(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$是方程(6)的解，且$\varphi$不是常数，那末$\varphi(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$是方程组(5)的首次积分．因此，为了求解偏微分方程(6)只要找出相应于它的方程组(5)的首次积分．

我们在第一章也引述了下面的事实：如果$\varphi_1(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$，$\varphi_2(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$，$\cdots$，$\varphi_n(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$是方程组(5)的$n$个互相独立的首次积分，函数$\Phi(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)$是其变量的任意连续可微函数，那末复合函数

$$\Phi(\varphi_1(t,x_1,\cdots,x_n),\ \varphi_2(t,x_1,\cdots,x_n),\ \cdots,\ \varphi_n(t,x_1,\cdots,x_n))$$

也是(5)的首次积分．所以

$$z=\Phi(\varphi_1(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \cdots,\ \varphi_n(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)) \tag{7}$$

也是方程(6)的解．

现在证明(7)包括了方程(6)的全部的解，即方程(6)的任一解可以由(7)得到．事实上，假若

$$z=\varphi(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

是方程(6)的解，那末$n+1$个函数

$$\varphi(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \varphi_1(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \cdots,\ \varphi_n(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

都是方程组(5)的首次积分，从而成立着$n+1$个恒等式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+f_1(t,x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\cdots+f_n(t,x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+f_1(t,x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\cdots+f_n(t,x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\equiv 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}+f_1(t,x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}+\cdots+f_n(t,x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\equiv 0.$$

可以把它看为有非零解 1, f_1, $\cdots$, f_n 的线性齐次代数方程组，所以它的系数行列式恒等于零：

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial t} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial t} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}=0.$$

因之 $n+1$ 个函数

$$\varphi(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \varphi_1(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \cdots,\ \varphi_n(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

是函数相关的，而 $\varphi_1(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$，$\cdots$，$\varphi_n(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 是互相独立的，所以存在函数 Φ 使得

$$\varphi(t,x_1,\cdots,x_n)\equiv\Phi(\varphi_1(t,x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_n(t,x_1,\cdots,x_n)).$$

因此，如果找到了方程组(5)的 n 个独立的首次积分，就可以找到偏微分方程(6)的全部的解.

特别，我们得到这样的结论：$n+1$ 个自变量的一阶线性偏微分方程(6)的任何 $n+1$ 个解一定是函数相关的.

[例 1] 试求偏微分方程

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0 \tag{8}$$

的全部的解.

偏微分方程(8)是一阶线性齐次偏微分方程，它所对应的一阶常微分方程组是

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_2}{dx_1}&=\frac{x_2}{x_1},\\ \frac{dx_3}{dx_1}&=\frac{x_3}{x_1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_n}{dx_1}&=\frac{x_n}{x_1},\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

或写为对称形状

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\cdots=\frac{dx_n}{x_n}.$$

方程组(9)的首次积分是

$$\frac{x_2}{x_1}=c_1,\ \frac{x_3}{x_1}=c_2,\ \cdots,\ \frac{x_n}{x_1}=c_{n-1},$$

且它们是互相独立的，因而

$$z=\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\cdots,\frac{x_n}{x_1}\right),\tag{10}$$

包括方程(8)的全部的解，其中 Φ 是其变元的任意可微函数.

从表达式(10)知道，方程(8)的任一解是零次齐次函数. 在数学分析中已经知道，零次齐次函数是满足方程(8)的.

习 题

试求下列方程的全部解(1～15):

1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$　　2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x}-xy^x.$　　4. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

5. $\sqrt{x}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\sqrt{z}\dfrac{\partial f}{\partial z}=0.$

6. $xz\dfrac{\partial u}{\partial x}+yz\dfrac{\partial u}{\partial y}-(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

7. $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+(xy^3-xy^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}+yz\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

8. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+(xy^2\ln x-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

9. $(mz-ny)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(nx-lz)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(ly-mx)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

10. $z(x+z)\frac{\partial u}{\partial x}-y(y+z)\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

11. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial y}+\left(xz^2-\frac{1}{x}z\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

12. $\frac{2x+y}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{x(y+z)}{y}\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

13. $x(y^2-z^2)\frac{\partial u}{\partial x}-y(z^2+x^2)\frac{\partial u}{\partial y}+z(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

14. $\frac{x-y}{z-u}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{x-y}{z-u}\frac{\partial v}{\partial y}+(x-y+1)\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial u}=0$.

15. $\Delta_1\frac{\partial u}{\partial x}+\Delta_2\frac{\partial u}{\partial y}+\Delta_3\frac{\partial u}{\partial z}=0$,

其中 $\Delta_k(k=1, 2, 3)$是行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

的第三行第 k 个元素所对应的代数余子式.

16. 设 $X_k(t, x_1, \cdots, x_n)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$是连续可微的. 如果 $x_1=\varphi_1(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0), \cdots, x_n=\varphi_n(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$是方程组

$$\frac{dx_k}{dt}=X_k(t, x_1, \cdots, x_n)\quad(k=1, 2, \cdots, n)$$

的解, 且适合条件

$$\varphi_k(t_0, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)=x_k^0\quad(k=1, 2, \cdots, n).$$

试证每一函数 $u=\varphi_k(t_0, t, x_1, \cdots, x_n)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$都是偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}X_k(t, x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_k}=0$$

的解.

§2　拟线性一阶偏微分方程

一、拟线性一阶偏微分方程所定义的方向场和它的特征方程

含有两个自变量的一阶拟线性偏微分方程是

$$a(x, y, z)p+b(x, y, z)q=c(x, y, z),\tag{1}$$

这里未知函数 z 的偏导数 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$在方程(1)中是一次的.

设函数 $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$ 和 $c(x, y, z)$ 在 (x, y, z) 的三维空间的某一区域 G 内有连续的一阶偏导数，且 a 和 b 在 G 内不同时为零.

现在来说明方程(1)的几何意义. 以区域 G 内的每一点 (x, y, z) 为始点，以 (a, b, c) 为方向数引一向量，我们就在区域 G 内的每一点确定了一个方向，因而得到了一个方向场，我们称这个方向场是由偏微分方程(1)所确定的*方向场*. 设光滑曲面 $z=\varphi(x, y)$——即 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ 是连续的——是方程(1)的积分曲面，那末它在 $(x, y, \varphi(x, y))$ 处的法线方向数 $p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $q=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, -1 适合等式

$$a\cdot p+b\cdot q+c\cdot(-1)=0,$$

也就是说向量 (a, b, c) 和向量 $(p, q, -1)$ 是互相垂直的，所以积分曲面 $z=\varphi(x, y)$ 上任一点的法线与方程(1)的方向场在这一点的方向互相垂直(图 6.1).

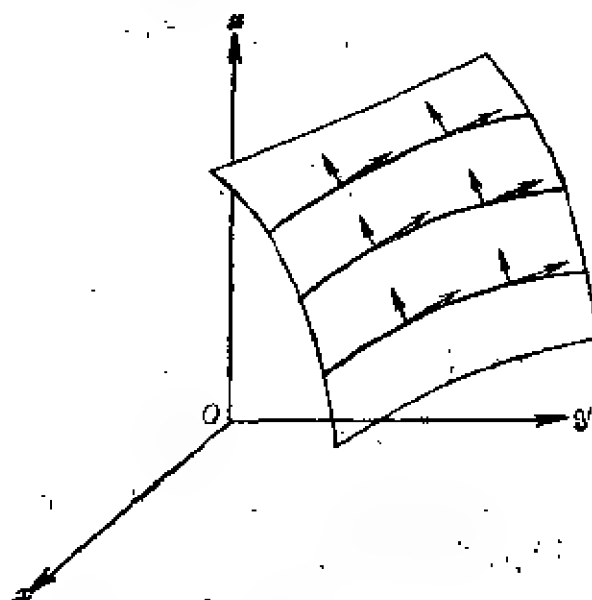


图 6.1

另一方面，一阶常微分方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{ds}&=a(x, y, z),\\ \frac{dy}{ds}&=b(x, y, z),\\ \frac{dz}{ds}&=c(x, y, z)\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

在 (x, y, z) 空间中确定的方向场与偏微分方程(1)确定的方向场一致. 我们称常微分方程组(2)是偏微分方程(1)的*特征方程*. 而常微分方程组(2)的每一解 $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$ 在三维空间 (x, y, z) 中表示一条曲线，这条曲线称为一阶偏微分方程(1)的*特征曲线*.

二、等价性定理

偏微分方程(1)的求解问题和常微分方程组(2)的求解问题在下面的意义下是等价的:

1° 特征曲线族(即方程组(2)的相轨线族)所织成的光滑曲面是偏微分方程(1)的积分曲面。

2° 偏微分方程(1)的每一积分曲面 $z=\varphi(x, y)$ 可以由特征曲线族织成，即过曲面 $z=\varphi(x, y)$ 的每一点所引的特征曲线整个落在曲面 $z=\varphi(x, y)$ 上。

为了证明结论 1°，先证明：如果光滑曲面 $z=\varphi(x, y)$（不一定是积分曲面）含有特征曲线 $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$，那末

$$
\begin{aligned}
a(x(s),\ y(s),\ z(s))\frac{\partial\varphi(x(s),\ y(s))}{\partial x}&\\
+b(x(s),\ y(s),\ z(s))\frac{\partial\varphi(x(s),\ y(s))}{\partial y}&\\
\equiv c(x(s),\ y(s),\ z(s))。&\qquad(3)
\end{aligned}
$$

事实上，因为特征曲线在曲面 $z=\varphi(x, y)$ 上，所以

$$z(s)\equiv\varphi(x(s),\ y(s)),$$

两边对 s 求导数，有

$$z'(s)\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'(s)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'(s).$$

但按特征曲线的定义，$x'(s)=a$, $y'(s)=b$, $z'(s)=c$，代入上式即得(3)．这就说明了，曲面 $z=\varphi(x, y)$ 的法线方向数 $(p, q, -1)$ 沿特征线适合方程(1)．所以由特征曲线织成的光滑曲面一定是方程(1)的积分曲面．

现在证明结论 2°．设 $z=\varphi(x, y)$ 是方程(1)的积分曲面，这时在曲面上每一点处(1)的方向场的方向 (a, b, c) 与曲面的法线方向垂直，所以向量 (a, b, c) 位在积分曲面的切平面上，这样，在积分曲面上用向量 (a, b, c) 定义了方向场．如果在积分曲面 $z=\varphi(x, y)$ 上引一条曲线，使它在每点处的切线方向就是曲面上方向场的方向，那末这条曲线就是方程(1)的特征曲线．

我们把上面的议论用分析表达式写出．把 $z=\varphi(x, y)$ 代入方程组(2)的前面两个式子，得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{ds}&=a(x,\ y,\ \varphi(x,\ y)),\\ \frac{dy}{ds}&=b(x,\ y,\ \varphi(x,\ y)).\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

求解这方程组，得到两个函数 $x=x(s)$，$y=y(s)$．置

$$z(s)\equiv\varphi(x(s),\ y(s)),\tag{5}$$

那末

$$\begin{aligned}x'(s)&\equiv a(x(s),\ y(s),\ z(s)),\\ y'(s)&\equiv b(x(s),\ y(s),\ z(s)),\\ z'(s)&\equiv\varphi_x\cdot x'(s)+\varphi_y\cdot y'(s)\equiv a\varphi_x+b\varphi_y\\ &\equiv c(x(s),\ y(s),\ z(s)),\end{aligned}$$

所以曲线 $x=x(s)$，$y=y(s)$，$z=z(s)$ 是方程(1)的特征曲线，且由(5)知道它在曲面 $z=\varphi(x,\ y)$ 上．这就是所要证明的结论 2°．

根据以上讨论，我们得到求解一阶拟线性偏微分方程的方法：首先作出它的特征方程(2)，并求出它的全部解，然后从其中选取一族特征曲线，使它们织成光滑曲面，这样就得到方程(1)的一个积分曲面．

三、柯西问题

如果在方程(1)的定义区域 G 内预先给定了一条曲线

$$l:\ x=x_0(t),\ y=y_0(t),\ z=z_0(t),\tag{6}$$

要求找方程(1)的积分曲面 $z=\varphi(x,\ y)$，使它含有曲线 l，即有

$$z_0(t)\equiv\varphi(x_0(t),\ y_0(t)),$$

这个问题称为方程(1)的柯西问题，它是常微分方程的初值问题在偏微分方程中的自然拓广．

我们在解柯西问题时，假设 $x_0'(t)$，$y_0'(t)$，$z_0'(t)$ 是连续的，且 $x_0'^2(t)+y_0'^2(t)\neq0$．

和常微分方程的初值问题解的存在性不一样，对偏微分方程的柯西问题有三种可能：

1° 如果

$$x_0'(t):y_0'(t)\neq a(x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t)):b(x_0(t),y_0(t),z_0(t)),$$

那末上述柯西问题有唯一的解；

2° 如果 l 是特征线，即

$$\frac{x_0'(t)}{a(x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t))}=\frac{y_0'(t)}{b(x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t))}$$
$$=\frac{z_0'(t)}{c(x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t))},$$

那末上述柯西问题的解不是唯一的；

3° 如果 l 不是特征线，但

$$x_0'(t):y_0'(t)\equiv a(x_0(t),y_0(t),z_0(t)):b(x_0(t),y_0(t),z_0(t)),$$

那末上述柯西问题没有解.

证 先讨论情形 1°. 根据关于 a, b, c 的假设及常微分方程组的解的存在性和唯一性定理，对于曲线 l 上的任何一点 $(x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t))$，方程组(2)有解(以 s 为自变量)

$$\left.\begin{aligned}x&=x(s;x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t)),\\ y&=y(s;x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t)),\\ z&=z(s;x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t)),\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

适合初值条件

$$x(0;x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t))\equiv x_0(t),$$
$$y(0;x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t))\equiv y_0(t),$$
$$z(0;x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t))\equiv z_0(t).$$

把(7)的右端简记为 $x(s,\ t)$, $y(s,\ t)$, $z(s,\ t)$，当 t 变动时就得到一族以 l 的点为始点的特征曲线，这族特征曲线在 l 的附近织成一曲面，这曲面就是柯西问题的解.

事实上，因为(7)是方程组(2)的解，所以

$$\frac{\partial x}{\partial s}=a(x(s,\ t),\ y(s,\ t),\ z(s,\ t)),$$

$$\frac{\partial y}{\partial s}=b(x(s,\ t),\ y(s,\ t),\ z(s,\ t)),$$

又
$$\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{s=0}=x_0'(t),\quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{s=0}=y_0'(t),$$

所以当 $s=0$ 时，

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{matrix}\right|_{s=0}=\left|\begin{matrix}a(x_0(t),y_0(t),z_0(t)) & b(x_0(t),y_0(t),z_0(t))\\ x_0'(t) & y_0'(t)\end{matrix}\right|\neq 0.$$

根据隐函数存在定理，可以从(7)的前两式

$$x=x(s,\ t),\quad y=y(s,\ t)$$

把 s 和 t 解为 x 和 y 的函数：

$$s=s(x,\ y),\quad t=t(x,\ y).$$

它们都是 x, y 的连续可微函数，代入(7)的第三式得到

$$z=z(s(x,\ y),\ \ t(x,\ y))\equiv\varphi(x,\ y).$$

函数 $\varphi(x,\ y)$ 是 x 和 y 的连续可微函数，因此

$$z=\varphi(x,\ y)$$

是由特征曲线族织成的光滑曲面，由本节第二段的证明可知它是柯西问题的解。

又因为第二段也证明了下面的事实：含有 l 的积分曲面必可以由特征曲线族织成，但由过 l 的特征曲线织成的曲面是唯一的，因而柯西问题的解是唯一的。

再讨论情形 2°. 因为 l 是特征曲线，所以从其上每一点所引的特征曲线必是 l 自己，因而不能得到曲面. 但这时可以任意引一条与 l 相交的曲线 l'，使得 l' 适合 1° 的要求，这样，以 l' 为初始曲线就可以作出一积分曲面，含有特征曲线 l(图 6.2)。

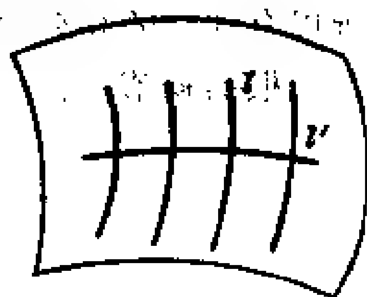


图 6.2

但因为 l' 是任意的，所以过特征曲线 l 有无穷多个积分曲面。

最后讨论情形 3°. 由

$$\frac{x_0'(t)}{a}=\frac{y_0'(t)}{b}=k(t),$$

得到

$$x_0'(t)=ka,\quad y_0'(t)=kb.$$

假设存在积分曲面 $z=\varphi(x,\ y)$，它含有 l，那末

$$z_0(t)\equiv\varphi(x_0(t),\ y_0(t)),$$

所以

$$z_0'(t)=x_0'(t)\varphi_x+y_0'(t)\varphi_y=k(t)\,(a\varphi_x+b\varphi_y)=kc$$

即
$$\frac{x_0'(t)}{a}=\frac{y_0'(t)}{b}=\frac{z_0'(t)}{c},$$
这就是说曲线 $x=x_0(t)$, $y=y_0(t)$, $z=z_0(t)$ 必是特征曲线. 这与假设 l 不是特征曲线矛盾, 所以在情形 3° 时柯西问题的解不存在.

[例 1]　试求方程
$$xq-yp=0 \tag{8}$$
的过曲线 l: $x=0$, $z=y^2$ 的积分曲面.

这时 $a=-y$, $b=x$, $c=0$. 方程(8)的特征方程是
$$\frac{dx}{ds}=-y,\quad \frac{dy}{ds}=x,\quad \frac{dz}{ds}=0,$$
它的任一解是
$$x=c_1\cos s+c_2\sin s,\quad y=c_1\sin s-c_2\cos s,\quad z=c_3.$$
曲线 l 的参数方程是 $x=0$, $y=t$, $z=t^2$, 因为
$$\begin{vmatrix} a & b \\ x_0' & y_0' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-t\neq 0,$$
所以有唯一的积分曲面含有曲线 l.

根据初值条件
$$x|_{s=0}=c_1=0,$$
$$y|_{s=0}=-c_2=t,$$
$$z|_{s=0}=c_3=t^2,$$
得到
$$x=-t\sin s,\quad y=t\cos s,\quad z=t^2.$$
由前两式消去 s, 得到 $x^2+y^2=t^2$, 代入第三式得到所要求的过曲线 l 的积分曲面是
$$z=x^2+y^2.$$

[例 2]　试求方程(8)过曲线 l: $z=1$, $x^2+y^2=4$ 的积分曲面.

l 的参数方程是
$$x=2\cos t,\quad y=\pm 2\sin t,\quad z=1,$$
它的切线方向是
$$(-2\sin t,\ \pm 2\cos t,\ 0),$$

它和方程(8)的方向场的方向

$$(\mp 2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)$$

是一致的. 所以 l 是特征线. 根据前面的讨论, 有无穷多个曲面含有曲线 l. 例如,

$$z=x^2+y^2-3,\quad 4z=x^2+y^2,\quad z=-x^2-y^2+5$$

等等都是所提柯西问题的解.

[例 3] 试求方程(8)过曲线 l: $z=x$, $x^2+y^2=1$ 的积分曲面.

曲线 l 的参数方程是 $x=\cos t$, $y=\pm\sin t$, $z=\cos t$, 由于沿 l 成立着恒等式

$$x_0'(t):y_0'(t)\equiv(-\sin t):(\pm\cos t)\equiv(-y):x\equiv a:b,$$

但 l 不是特征线, 因而所提的柯西问题无解.

习 题

试求下列曲面族的正交曲面(1~5):

1. $x^2+y^2+z^2=a^2$.　　　2. $xyz=C$.

3. $z^2=Cxy$.　　　4. $z+(1+x)(1+y)=C$.

5. $z=Cxy$.

试求下列柯西问题的解(6~12):

6. $xp+yq=0$;　　　$l: y=1,\ z=x$.

7. $z(x+z)p-y(y+z)q=0$;　　　$l: x=1,\ z=\sqrt{y}$.

8. $xz\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}+xy=0$;　　　$l: z=h,\ xy=a^2$.

9. $\operatorname{tg}x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$;　　　$l: y=x,\ z=x^3$.

*10. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy$;　　　$l: y=x,\ z=x^2$.

11. $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z^2-x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}+x=0$;　　　$l: y=x^2,\ z=2x$.

12. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0$;　　　$l: x-y=0,\ x-yz=1$.

13. 试求经过直线 $y=x$, $z=h$ 且与球面族 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 正交的曲面的直角坐标表示式.

14. 试求经过圆周 $z=h$, $x^2+y^2=1$ 且与双曲抛物面族 $xy=az$ 正交的曲面.

15．试求经过直线 $y=1$, $z=x$ 的曲面，使它的任一切平面在 Oz 轴上的截距等于 nz，其中 z 是切点 (x, y, z) 的第三个坐标，n 是某一常数．

16．设 $u=\varphi(x_1, \cdots, x_n, z)$ 是线性偏微分方程

$$\sum_{k=1}^{n} X_k(x_1, \cdots, x_n, z)\frac{\partial u}{\partial x_k}+R(x_1, \cdots, x_n, z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

的积分曲面．试证：在 $(x_1, \cdots, x_n, z)$ 空间中由方程

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n, z)=0$$

所决定的曲面 $z=\psi(x_1, \cdots, x_n)$ 是拟线性偏微分方程

$$\sum_{k=1}^{n} X_k(x_1, \cdots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_k}=R(x_1, \cdots, x_n, z)$$

的积分曲面．

利用上题的结论，求下列方程的解（17～22）：

17．$(y+z+u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+u+x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(u+x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$．

18．$\dfrac{\partial u}{\partial x}+b\dfrac{\partial u}{\partial y}+c\dfrac{\partial u}{\partial z}=xyz$，其中 b, c 是常数．

19．$z(x+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$．

20．$xz\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}+xy=0$．

21．$(y^3x-2x^4)p+(2y^4-x^3y)q=9z(x^3-y^3)$．

22．$xz(xy+z^2)p-yz(xy+z^2)q=x^4$．

§3　全积分、通积分和奇积分

这一节讨论两个自变量的一般的一阶偏微分方程

$$F(x, y, z, p, q)=0. \tag{1}$$

今后我们总假设函数 F 在它的变量的五维空间的某一区域内关于其所有的变元有两阶的连续偏导数．

为了下面的需要，我们先引述曲面族的包络的概念．

一、曲面族的包络

设有一个含单参数 α 的曲面族

$$\Phi(x, y, z, \alpha)=0, \tag{2}$$

其中函数 Φ 在变量 x, y, z, α 空间的一区域内有三阶为止的连续

偏导数，固定 α 的一个值时，(2) 表示一个有连续变动切平面的曲面。

如果存在一曲面 S，在它上面的每一点处，曲面 S 总有曲面族 (2) 中的一个曲面同它相切，那末曲面 S 称为这单参数曲面族的包络面．自然，并不是任何曲面族都有包络面的．

现在来决定包络面的方程．由定义知道包络面的每一点必属于族中某一曲面，而这曲面由参数 α 完全决定，所以包络面上的每一点确定所属曲面的参数

$$\alpha=\alpha(x,\ y,\ z). \tag{3}$$

因此成立恒等式

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ \alpha(x,\ y,\ z))\equiv 0. \tag{4}$$

为了表述包络面和族中曲面相切的条件，考虑位于包络面上的某一曲线

$$x(t),\ y(t),\ z(t).$$

因为这曲线上点的坐标应满足 (4)，所以满足恒等式

$$\Phi(x(t),\ y(t),\ z(t),\ \alpha(t))\equiv 0, \tag{5}$$

其中 $\alpha(t)$ 简记参数 $\alpha(x(t),\ y(t),\ z(t))$，且假设 $\dfrac{d\alpha}{dt}\neq 0$，即这曲线上不同的点对应于不同的参数．

关于 t 导微恒等式 (5)，得到新的恒等式

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt}=0. \tag{6}$$

包络面上每一曲线在其任一点的切向量 $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt},\ \dfrac{dz}{dt}\right)$ 应当是族中对应曲面的切向量，它应和这曲面的法线向量 $\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x},\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y},\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$ 正交，所以有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0. \tag{7}$$

代入 (6) 并考虑到 $\dfrac{d\alpha}{dt}\neq 0$，就得到方程

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=0. \tag{8}$$

所以包络面上的点应满足两个关系式

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ \alpha)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\Phi(x,\ y,\ z,\ \alpha)=0. \tag{9}$$

从这两个关系式消去参数 α，就得到包络面的隐式方程

$$f(x,\ y,\ z)=0.$$

对于曲面族(1)，由(9)所能确定的曲面，称为这曲面族的判别曲面．可以说明，如果沿判别曲面，Φ_x, Φ_y, Φ_z 不同时等于零，那末它一定是包络面．事实上，在判别曲面上过一点 P 任意选取适合 $\alpha'(t)\neq 0$ 的曲线 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，那末从(9)中第一式 $\Phi(x(t),\ y(t),\ z(t),\ \alpha(t))\equiv 0$ 关于 t 导微，得到恒等式(6)，考虑到(9)的第二式 $\Phi_\alpha=0$，得到关系式(7)．由于 Φ_x, Φ_y, Φ_z 不同时为零，所以它们表示族中曲面的法线方向，(7)式说明在判别曲面上所选的上述曲线在每一点的切线和过这一点的族中曲面的法线正交．变动过点 P 的曲线，仍旧得到同样的结论．这说明判别曲面在点 P 的切平面合于过这点的族中曲面在这一点的切平面，所以由(9)消去 α 所确定的曲面是曲面族(2)的包络面．

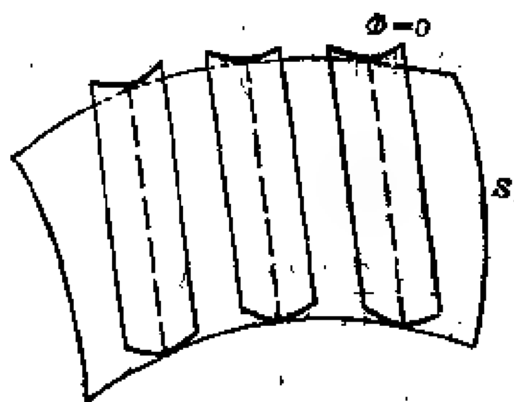


图　6.3

当参数 α 固定时，式(9)在族中的曲面 $\Phi(x,\ y,\ z,\ \alpha)=0$ 上确定一条曲线，也就是判别曲面上对应于相同参数值 α 的曲线．当判别曲面是包络面时，这曲线也称为包络面的"特征线"．族中曲面和包络面沿特征线相切，再变动 α，就可看出包络面是由特征线组成的(图 6.3)．

如果曲面族中相邻的两曲面相交，那末交线应满足

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ \alpha)=0\quad 及\quad \Phi(x,\ y,\ z,\ \alpha+\Delta\alpha)=0,$$

从而
$$\frac{\Phi(x,\ y,\ z,\ \alpha+\Delta\alpha)-\Phi(x,\ y,\ z,\ \alpha)}{\Delta\alpha}=0,$$

当 $\Delta\alpha\to 0$ 时取极限，就得到 $\Phi_\alpha(x, y, z, \alpha)=0$. 因此，这时包络面的特征线可以看成族中相邻曲面交线的极限位置.

[例 1] 求球心在 z 轴上半径为定数 r 的球面族

$$x^2+y^2+(z-\alpha)^2=r^2$$

的包络面.

关于 α 求导数，得

$$-2(z-\alpha)=0.$$

消去 α, 得到柱面 $x^2+y^2=r^2$, 特征线是族中球面和 $z=\alpha$ 平面相交的大圆(图 6.4).

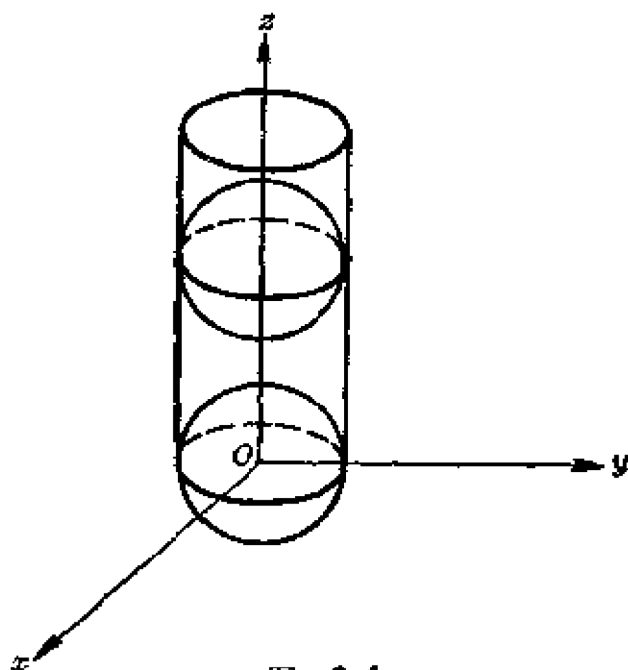


图 6.4

[例 2] 过定点 A 的单参数平面族(这族平面不通过定直线)的包络面是以 A 为顶点的锥面.

因为族中任意两平面是相交的，又由假定，Φ_x, Φ_y, Φ_z 不同时等于零，所以这平面族有包络面，特征线是过 A 点的直线. 包络面既然由特征线构成，所以包络面是锥面.

除了单参数曲面族外，我们还考虑含两个参数的曲面族

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta)=0. \tag{10}$$

若存在一曲面 S^*, 在它上面的每一点处总有这双参数曲面族中一个曲面同它相切，且在 S^* 上任一点附近，和各点对应的参数 (α, β) 皆不相同，就称 S^* 是双参数曲面族(10)的包络面.

设 (10) 中函数满足一般的分析条件(如 Φ 在它的变量的空间的某一区域内有连续的偏导数等等). 又 S^* 上点 (x, y, z) 所对应的族中曲面的参数为 α, β, 那末曲面 S^* 在一点附近的方程可记为

$$x=x(\alpha, \beta),\ y=y(\alpha, \beta),\ z=z(\alpha, \beta). \tag{11}$$

从而有恒等式

$$\Phi(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta), z(\alpha, \beta), \alpha, \beta)=0. \tag{12}$$

关于 α, β 导微，得到

$$\left.\begin{aligned}\Phi_x \frac{\partial x}{\partial \alpha}+\Phi_y \frac{\partial y}{\partial \alpha}+\Phi_z \frac{\partial z}{\partial \alpha}+\Phi_\alpha=0,\\ \Phi_x \frac{\partial x}{\partial \beta}+\Phi_y \frac{\partial y}{\partial \beta}+\Phi_z \frac{\partial z}{\partial \beta}+\Phi_\beta=0.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

根据 S^* 是包络的条件，曲面 S^* 的法线合于族中曲面 $\Phi=0$ 的法线．也就是说 $\Phi=0$ 的法线应当和 S^* 上的曲线的切线正交．曲面 $\Phi=0$ 的法线方向为 Φ_x, Φ_y, Φ_z，曲面(11)上 $\beta=$常数的曲线的切线方向为 $\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \frac{\partial z}{\partial \alpha}$；$\alpha=$常数的曲线的切线方向为 $\frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial y}{\partial \beta}, \frac{\partial z}{\partial \beta}$，因此有

$$\left.\begin{aligned}\Phi_x \frac{\partial x}{\partial \alpha}+\Phi_y \frac{\partial y}{\partial \alpha}+\Phi_z \frac{\partial z}{\partial \alpha}=0,\\ \Phi_x \frac{\partial x}{\partial \beta}+\Phi_y \frac{\partial y}{\partial \beta}+\Phi_z \frac{\partial z}{\partial \beta}=0.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

从此得到 S^* 上的点还应满足 $\Phi_\alpha=0, \Phi_\beta=0$．所以包络面上的点应满足三个关系式

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x, y, z, \alpha, \beta)=0,\\ \Phi_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta)=0,\\ \Phi_\beta(x, y, z, \alpha, \beta)=0.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

消去 α, β，即得这包络面的隐式方程

$$\Psi(x, y, z)=0.$$

一般说来，对一双参数曲面族，由(15)所确定的曲面不一定是包络面，但当 Φ_x, Φ_y, Φ_z 在一区域内不全为零时，它一定是包络面，证明从略．

最后我们注意到，一般的曲面是它的含两个参数切平面族的包络面．但是也有例外，如锥面，它的切平面族只含一个参数．

［例 3］ 求球心在 x, y 平面上而半径等于定数 r 的球面族

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2$$

的包络．

求方程对 α, β 的导数，得到

$$-2(x-\alpha)=0, \quad -2(y-\beta)=0.$$

和原方程消去 α, β，得到 $z^2=r^2$，即平面 $z=\pm r$. 这两平面和族中每一曲面在一点相切.

二、全积分、通积分和奇积分

在引论中已经看到，一阶偏微分方程的一般解中往往含有一个任意函数. 然而在许多问题中，起重要作用的并不是含有任意函数的解，而是以下要讨论的全积分.

一阶偏微分方程

$$F(x, y, z, p, q)=0 \tag{1}$$

的含两个实质常数 a 和 b 的积分曲面族

$$z=\varphi(x, y, a, b)$$

称为方程(1)的全积分.

所谓含两个实质参数的函数族，是指不能把它们表示成一个参数，也就是不存在函数 $c(a, b)$ 及 $\Phi(x, y, c)$ 使得

$$\Phi(x, y, c(a, b))\equiv\varphi(x, y, a, b).$$

这时，我们说 a 和 b 是函数族的两个实质参数.

例如，a 和 b 不是函数族

$$\varphi(x, y, a, b)=x+y+ab$$

的实质参数，事实上取 $c=ab$, $\Phi=x+y+c$，就有

$$\Phi(x, y, c(a, b))\equiv\varphi(x, y, a, b).$$

又如，a 和 b 是函数族

$$\varphi(x, y, a, b)=ax+b$$

的两个实质参数，因为并不能把 a 和 b 换成一个参数.

可以证明，如果函数 $\varphi(x, y, a, b)$ 有连续的偏导数 $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_{ax}, \varphi_{bx}, \varphi_{ay}, \varphi_{by}$，那末为了使 a 和 b 为两个实质参数，充分和必要条件是函数矩阵

$$\begin{pmatrix} \varphi_a & \varphi_{ax} & \varphi_{ay} \\ \varphi_b & \varphi_{bx} & \varphi_{by} \end{pmatrix} \tag{16}$$

的(当 x, y, a, b 变动时)最大秩数等于2.

证 如果 a 和 b 不是实质参数，即存在 $c(a, b)$ 和 $\Phi(x, y, c)$ 使

$$\varphi(x, y, a, b) \equiv \Phi(x, y, c(a, b)),$$

那末

$$\varphi_a = \Phi_c \frac{\partial c}{\partial a}, \quad \varphi_b = \Phi_c \frac{\partial c}{\partial b},$$

$$\varphi_{ax} \equiv \Phi_{cx} \frac{\partial c}{\partial a}, \quad \varphi_{bx} \equiv \Phi_{cx} \frac{\partial c}{\partial b},$$

$$\varphi_{ay} = \Phi_{cy} \frac{\partial c}{\partial a}, \quad \varphi_{by} \equiv \Phi_{cy} \frac{\partial c}{\partial b}.$$

从此，矩阵(16)的任一两阶行列式等于零，即它的最大秩数小于2.

反之，如果矩阵(16)的最大秩数小于2，若 $\varphi_a \neq 0$，则必存在关于 x 和 y 有连续偏导数的函数 $\lambda(x, y, a, b)$，使得

$$\varphi_b \equiv \lambda \varphi_a, \quad \varphi_{bx} \equiv \lambda \varphi_{ax}, \quad \varphi_{by} \equiv \lambda \varphi_{ay}. \tag{17}$$

由第一式，关于 x 和 y 求偏导数，得到

$$\varphi_{bx} \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial x} \varphi_a + \lambda \varphi_{ax},$$

$$\varphi_{by} \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial y} \varphi_a + \lambda \varphi_{ay}.$$

注意到(17)的第二、三式，有

$$\varphi_a \frac{\partial \lambda}{\partial x} \equiv 0, \quad \varphi_a \frac{\partial \lambda}{\partial y} \equiv 0.$$

从此得到

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} \equiv 0,$$

即 $\lambda(x, y, a, b)$ 仅是参数 a 和 b 的函数，而与 x 和 y 无关，记它为 $\lambda(a, b)$。因之函数 $\varphi(x, y, a, b)$ 作为 a 和 b 的函数适合偏微分方程(参看(17))

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} \lambda(a, b) - \frac{\partial \varphi}{\partial b} \equiv 0.$$

再考虑偏微分方程

$$\frac{\partial c}{\partial a} \lambda(a, b) - \frac{\partial c}{\partial b} \equiv 0,$$

记它的解为

$$c = c(a, b).$$

根据一阶线性齐次偏微分方程的理论，参数 a, b 的函数 $\varphi(x, y, a, b)$ 应该和函数 $c(a, b)$ 相关，即存在函数 Φ，使得

$$\varphi(x, y, a, b) \equiv \Phi(x, y, c(a, b)).$$

因此，a 和 b 不是两个实质参数.

如果，我们在方程(1)的全积分中，置 $b = \omega(a)$，就得到一个单参数 a 的曲面族

$$z=\varphi(x, y, a, \omega(a)),$$

其中 ω 是一个任意函数. 这单参数曲面族的包络面也是方程(1)的积分曲面. 包络面可以从

$$z=\varphi(x, y, a, \omega(a)), \quad \varphi_a+\varphi_b\omega'(a)=0$$

消去参数 a 得到. 由于 ω 是一个任意函数, 所以我们得到了方程(1)的含有一个任意函数的积分曲面族, 我们称它为方程(1)的通积分.

如果得到了方程(1)的全积分, 即得到含有两个参数 a 和 b 的曲面族, 而求它的包络面, 那末包络面的方程是由

$$z=\varphi(x, y, a, b),$$
$$\varphi_a(x, y, a, b)=0,$$
$$\varphi_b(x, y, a, b)=0$$

消去参数 a 和 b 得到的. 这样得到的曲面(如果存在的话), 也是(1)的积分曲面, 我们称为方程(1)的奇积分.

三、求全积分的例

对某些特殊的偏微分方程可以用特别的方法求它的全积分.

[例 4] 求克莱洛方程

$$z=px+qy+f(p, q)$$

的全积分.

容易证明

$$z=ax+by+f(a, b)$$

是克莱洛方程的积分曲面族, 且

$$\begin{vmatrix} \varphi_{ax} & \varphi_{ay} \\ \varphi_{bx} & \varphi_{by} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0.$$

所以它是克莱洛方程的全积分.

[例 5] 求偏微分方程

$$p^2+q^2=1$$

的全积分.

试求方程形状如下的积分曲面族:

$$z=ax+by+c,$$

把它代入方程得到

$$a^2+b^2=1.$$

所以　$$z=ax+\sqrt{1-a^2}\,y+c$$

和　$$z=ax-\sqrt{1-a^2}\,y+c$$

都是方程的积分曲面族．把它们合写在一个式子中，有

$$(z-ax-c)^2=(1-a^2)y^2.$$

容易验证，它是方程的全积分．

［例 6］　试求方程

$$px+qy=mz$$

的全积分和通积分．

我们用分离变量法求它的全积分，即求方程的形状如

$$z=f(x)+g(y)$$

的解．把它代入方程，得到

$$xf'(x)+yg'(y)=mf(x)+mg(y),$$

移项得到　$$xf'(x)-mf(x)=-yg'(y)+mg(y).$$

这就把变量 x 和 y 分离了．上式左端仅是 x 的函数，而右端只依赖于 y，因而 $xf'(x)-mf(x)=-yg'(y)+mg(y)=c$，$c$ 是一常数，即 $f(x)$ 和 $g(y)$ 分别适合常微分方程

$$xf'(x)-mf(x)=c,$$

$$-yg'(y)+mg(y)=c,$$

解之得到　$$f(x)=ax^m-\frac{c}{m},$$

$$g(y)=by^m+\frac{c}{m}.$$

所以　$$z=ax^m+by^m$$

是方程的全积分．

现在利用全积分求它的通积分．置 $b=\omega(a)$，其中 ω 是一个任意函数，得曲面族

$$z=ax^m+\omega(a)y^m.$$

为求它的包络，将上式关于 a 导微得到

$$x^m+\omega'(a)y^m=0,$$

所以
$$\omega'(a)=-\left(\frac{x}{y}\right)^m,$$

但 $\omega'(a)$ 是 a 的任意函数，所以它的逆也是任意函数，即得

$$a=g\left[\left(\frac{x}{y}\right)\right].$$

把它代入 $z=ax^m+\omega(a)y^m$，得到

$$\begin{aligned}z&=g\left(\frac{x}{y}\right)x^m+\omega\left[g\left(\frac{x}{y}\right)\right]y^m\\&=y^m\left\{g\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^m+\omega\left[g\left(\frac{x}{y}\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

这里的花括弧中的函数是 $\frac{x}{y}$ 的任意函数，记之为 $w\left(\frac{x}{y}\right)$，那末

$$z=y^m w\left(\frac{x}{y}\right)$$

就是方程的通积分．它是 m 次齐次函数，所以方程的通积分是 m 次齐次函数，这是关于 m 次齐次函数的欧拉定理的逆．如果取 $w\left(\frac{x}{y}\right)=a\left[\frac{x}{y}\right]^m+b$，就又得到全积分 $z=ax^m+by^m$，如果取 $w\left(\frac{x}{y}\right)=a\left[\frac{x}{y}\right]^m+b\left[\frac{x}{y}\right]$，就得到全积分 $z=ax^m+by^{m-1}x$．

注．对于一般的形状为 $\varphi(x,p)=\psi(y,q)+z$ 的偏微分方程，常可以用分离变量法求它的全积分．

习　题

求下列曲面族的包络(1～6)：

1．$(x+y-a)^2=(z-a)^3$．

2．$z=a+\sqrt{1-x^2-y^2}$．

3．$x^2+y^2=4a(z-a)$．

4．$z=-\frac{a}{2}x+2ay-a^2$．

5．$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$．

6．椭圆曲面族 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，其中半轴之和 $a+b+c=1$．

7．求方程 $yp-xq=0$ 的全积分、通积分、奇积分．

8. 求方程 $z=pq$ 的全积分、奇积分.

9. 求方程 $2(y+zq)-q(xp+qy)$ 的全积分.

§4 相容方程组，求全积分的拉格朗日-夏比方法

求全积分的一般方法是以相容方程组的理论为基础的.

一、相容方程组

设给定了两个一阶偏微分方程的方程组

$$\left.\begin{aligned} F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0,\\ G(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中未知函数都是 z. 一般说来，不一定存在函数 $z=\varphi(x,\ y)$ 同时适合这两个方程，就是它们可能没有公共的积分曲面.

现在，我们讨论方程组(1)有公共解的条件.

当 $\dfrac{\partial(F,\ G)}{\partial(p,\ q)}\neq 0$ 时，可由方程组(1)解出 p 和 q：

$$\left.\begin{aligned} p=A(x,\ y,\ z),\\ q=B(x,\ y,\ z).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

我们先讨论方程组(2)的相容条件. 假设函数 A 和 B 在 $(x,\ y,\ z)$ 的某一区域 G 内有连续的一阶偏导数. 如果过区域 G 的每一点 $(x,\ y,\ z)$，方程组(2)都有一公共积分曲面，我们称方程组(2)是相容的.

如果方程组(2)有一个公共解 $z=\varphi(x,\ y)$，那末

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\equiv A(x,\ y,\ \varphi(x,\ y)),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\equiv B(x,\ y,\ \varphi(x,\ y)),$$

由此

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\equiv\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\equiv A_y+A_zB,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\equiv\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\equiv B_x+B_zA.$$

所以在积分曲面 $z=\varphi(x,\ y)$ 上应成立

$$A_y+A_zB\equiv B_x+B_zA. \tag{3}$$

因此当方程组(2)相容时，关系(3)在 G 内恒成立.

现在证明，如果条件(3)在 G 内恒成立，那末过区域 G 内的每一点 (x_0, y_0, z_0)，方程组(2)有一个公共积分曲面，即方程组(2)是相容的.

为证明这个事实，我们采用在第一章中解全微分方程时所采用的方法，即依次解两个常微分方程.

如果 $z=\varphi(x, y)$ 是方程组(2)的过点 (x_0, y_0, z_0) 的公共积分曲面，那末

$$\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\equiv A(x, y, \varphi(x, y)),$$

$$\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\equiv B(x, y, \varphi(x, y)).$$

特别，在直线 $y=y_0$ 上，变量 x 的函数 $\zeta(x)=\varphi(x, y_0)$ 应适合常微分方程

$$\zeta'(x)\equiv A(x, y_0, \zeta(x)), \tag{4}$$

在直线 $x=x_1$ 上，变量 y 的函数 $\zeta_1(y)\equiv\varphi(x_1, y)$ 适合常微分方程

$$\zeta_1'(y)\equiv B(x_1, y, \zeta_1(y)). \tag{5}$$

当 x_1 不同时，$\zeta_1(y)$ 也是不同的. 因此，函数 $\varphi(x, y)$ 在 (x_1, y_1) 处的值 $z_1=\varphi(x_1, y_1)$ 应该等于

$$\zeta_1(y_1)=\varphi(x_1, y_1),$$

并且

$$\zeta_1(y_0)=\varphi(x_1, y_0)=\zeta(x_1),$$

$$\zeta(x_0)=\varphi(x_0, y_0)=z_0.$$

从上面的分析看出，为了求函数 $\varphi(x, y)$ 在 (x_1, y_1) 的值，我们可以先求常微分方程(4)满足初值条件

$$\zeta(x_0)=z_0$$

的解 $\zeta(x)$，然后求常微分方程(5)的满足初值条件

$$\zeta_1(y_0)=\zeta(x_1)$$

的解 $\zeta_1(y)$，置 $y=y_1$，即得 $\varphi(x_1, y_1)=\zeta_1(y_1)$.

如果变动 x_1 和 y_1，就得到函数

$$z=\varphi(x, y).$$

现在证明，在条件(3)下，这样定义的函数适合方程组(2).

很明显，$\varphi(x_0, y_0)=z_0$. 又

$$\varphi(x, y) \equiv \zeta_1(y) \equiv \zeta(x) + \int_{y_0}^{y} B(x, \eta, \zeta_1(\eta)) d\eta$$

$$\equiv \zeta(x) + \int_{y_0}^{y} B(x, \eta, \varphi(x, \eta)) d\eta.$$

因此，$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \equiv B(x, y, \varphi(x, y))$，即 $z = \varphi(x, y)$ 适合 (2) 的第二个方程.

现在证明它也适合(2)的第一个方程. 由上式，

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \equiv \zeta'(x) + \int_{y_0}^{y} \left\{ \frac{\partial B(x, \eta, \varphi(x, \eta))}{\partial x} + \frac{\partial B(x, \eta, \varphi(x, \eta))}{\partial z} \frac{\partial \varphi(x, \eta)}{\partial x} \right\} d\eta$$

$$\equiv A(x, y_0, \zeta(x)) + \int_{y_0}^{y} \left\{ \frac{\partial B(x, \eta, \varphi(x, \eta))}{\partial x} + \frac{\partial B(x, \eta, \varphi(x, \eta))}{\partial z} A(x, \eta, \varphi(x, \eta)) \right\} d\eta$$

$$+ \int_{y_0}^{y} \frac{\partial B(x, \eta, \varphi(x, \eta))}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \varphi(x, \eta)}{\partial x} - A(x, \eta, \varphi(x, \eta)) \right\} d\eta.$$

由条件(3)，有

$$\int_{y_0}^{y} \left\{ \frac{\partial B(x, \eta, \varphi(x, \eta))}{\partial x} + \frac{\partial B(x, \eta, \varphi(x, \eta))}{\partial z} A(x, \eta, \varphi(x, \eta)) \right\} d\eta$$

$$\equiv \int_{y_0}^{y} \left\{ \frac{\partial A(x, \eta, \varphi(x, \eta))}{\partial y} + \frac{\partial A(x, \eta, \varphi(x, \eta))}{\partial z} B(x, \eta, \varphi(x, \eta)) \right\} d\eta$$

$$\equiv \int_{y_0}^{y} \frac{d}{d\eta} \{A(x, \eta, \varphi(x, \eta))\} d\eta$$

$$\equiv A(x, y, \varphi(x, y)) - A(x, y_0, \varphi(x, y_0))$$

$$\equiv A(x, y, \varphi(x, y)) - A(x, y_0, \zeta(x)).$$

所以
$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}-A(x,y,\varphi(x,y))$$
$$=\int_{y_0}^{y}\frac{\partial B(x,\eta,\varphi(x,\eta))}{\partial z}\left\{\frac{\partial\varphi(x,\eta)}{\partial x}-A(x,\eta,\varphi(x,\eta))\right\}d\eta.$$

把 x 看为固定的，置
$$\Psi(y)\equiv\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}-A(x,y,\varphi(x,y)),$$
得到
$$\Psi(y)\equiv\int_{y_0}^{y}\frac{\partial B(x,\eta,\varphi(x,\eta))}{\partial z}\Psi(\eta)d\eta.$$
两边对 y 导微，得到
$$\frac{d\Psi(y)}{dy}\equiv\frac{\partial B(x,y,\varphi(x,y))}{\partial z}\Psi(y).$$
也就是说，$u=\Psi(y)$（当 x 固定时）适合齐次线性常微分方程
$$\frac{du}{dy}=\frac{\partial B(x,y,\varphi(x,y))}{\partial z}u$$
和初值条件
$$\Psi(y_0)=\frac{\partial\varphi(x,y_0)}{\partial x}-A(x,y_0,\varphi(x,y_0))$$
$$\equiv\zeta'(x)-A(x,y_0,\zeta(x))\equiv0.$$
根据常微分方程的初值问题的解的唯一性定理，得到
$$\Psi(y)\equiv0,$$
即
$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\equiv A(x,y,\varphi(x,y)).$$
这就是说，$z=\varphi(x,y)$适合方程组(2)的第一个方程.

于是，$z=\varphi(x,y)$是方程组(2)的公共解.

根据上面的讨论，在解相容方程组(2)时，应先验证条件(3)是否成立，然后把 y 看为参数，解常微分方程
$$\frac{dz}{dx}=A(x,y,z),$$
得到
$$z=\varphi(x,y,c(y)),$$
其中 c 是 y 的任意连续可微函数. 把它代入(2)的第二个方程，得

到关于函数 $c(y)$ 的常微分方程，解出 $c(y)$ 代入上式即得方程组(2)的公共解.

注. 在证明条件(3)是方程组(2)相容的充分条件时，我们实际上是运用了常微分方程的解对参数和初值的可微性定理. 如果我们直接运用第四章§5的结论，可以把讨论简化.

我们先把方程组(2)的第一个方程看为自变量为 x 的常微分方程，而把 y 看为参数，求常微分方程

$$\frac{dz}{dx}=A(x,\ y,\ z)$$

适合初值条件：当 $x=x_0$ 时，$z=\zeta(y)$ 的解 $z=\varphi(x,\ y,\ x_0,\ \zeta(y))$，其中 $\zeta(y)$ 是待定的连续可微函数，即

$$\varphi(x_0,\ y,\ x_0,\ \zeta(y))\equiv\zeta(y). \qquad (*)$$

我们现在选择函数 $\zeta(y)$，使得把 $\varphi(x,\ y,\ x_0,\ \zeta(y))$ 看为 $x,\ y$ 的函数时，适合方程组(2)，因此它应适合(2)的第二个方程，即

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,\ y,\ x_0,\ \zeta(y))\equiv B[x,\ y,\ \varphi(x,\ y,\ x_0,\ \zeta(y))].$$

如果我们用 $\varphi_y(x,\ y,\ x_0,\ \zeta)$ 记函数 $\varphi(x,\ y,\ x_0,\ \zeta)$ 对 y 的偏导数，用 $\varphi_\zeta(x,\ y,\ x_0,\ \zeta)$ 记 φ 对 ζ 的偏导数，那末

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,\ y,\ x_0,\ \zeta(y))=\varphi_y(x,\ y,\ x_0,\ \zeta(y))+\varphi_\zeta(x,\ y,\ x_0,\ \zeta(y))\frac{d\zeta}{dy},$$

因此应有

$$\varphi_y(x,\ y,\ x_0,\ \zeta(y))+\varphi_\zeta(x,\ y,\ x_0,\ \zeta(y))\frac{d\zeta}{dy}\equiv B(x,\ y,\ \varphi(x,\ y,\ x_0,\ \zeta(y))). \qquad (**)$$

根据常微分方程的解对参数的可微性定理（参看第四章§5），我们有

$$\frac{d}{dx}[\varphi_y(x,\ y,\ x_0,\ \zeta)]\equiv A_z(x,\ y,\ \varphi)\varphi_y(x,\ y,\ x_0,\ \zeta)+A_y(x,\ y,\ \varphi),$$

并且 $\varphi_y(x_0,\ y,\ x_0,\ \zeta)=0$，而由解对初值的可微性定理，有

$$\frac{d}{dx}[\varphi_\zeta(x,\ y,\ x_0,\ \zeta)]\equiv A_z(x,\ y,\ \varphi)\cdot\varphi_\zeta(x,\ y,\ x_0,\ \zeta),$$

并且 $\varphi_\zeta(x_0,\ y,\ x_0,\ \zeta)=1$（参看第四章§5的定理1）. 由此，$\varphi_\zeta(x,\ y,\ x_0,\ \zeta)$ 恒不为零，由(**)解出 $\frac{d\zeta}{dy}$ 得到

$$\frac{d\zeta}{dy}=\frac{B(x,\ y,\ \varphi)-\varphi_y(x,\ y,\ x_0,\ \zeta(y))}{\varphi_\zeta(x,\ y,\ x_0,\ \zeta(y))}. \qquad (***)$$

上式的左端只是变量 y 的函数，因此，右端也应只是变量 y 的函数，而与变量 x 无关. 我们现在证明，在条件(3)成立时，(***)的右端是与变量 x 无关的. 为此，计算(***)的右端的函数对 x 的偏导数，得到它的分子上的表达式为

$$\{B_x(x, y, \varphi)+B_z(x, y, \varphi)\varphi_x(x, y, x_0, \zeta(y))$$
$$-\frac{d}{dx}[\varphi_y(x, y, x_0, \zeta(y))]\}\varphi_\zeta(x, y, x_0, \zeta(y))$$
$$-\frac{d}{dx}[\varphi_\zeta(x, y, x_0, \zeta(y))][B(x, y, \varphi)-\varphi_y(x, y, x_0, \zeta(y))]$$
$$\equiv[B_x(x, y, \varphi)+B_z(x, y, \varphi)A(x, y, \varphi)$$
$$-A_z(x, y, \varphi)\varphi_y(x, y, x_0, \zeta(y))-A_y(x, y, \varphi)]\varphi_\zeta(x, y, x_0, \zeta(y))$$
$$+A_z(x, y, \varphi)\varphi_\zeta(x, y, x_0, \zeta(y))\varphi_y(x, y, x_0, \zeta(y))$$
$$-A_z(x, y, \varphi)\varphi_\zeta(x, y, x_0, \zeta(y))B(x, y, \varphi)$$
$$\equiv[B_x(x, y, \varphi)+B_z(x, y, \varphi)A(x, y, \varphi)$$
$$-A_y(x, y, \varphi)-A_z(x, y, \varphi)B(x, y, \varphi)]\varphi_\zeta(x, y, x_0, \zeta(y))\equiv 0.$$

这就是说，(***) 的右端的函数是和 x 无关的. 因此，可由 (***) 得到确定 $\zeta(y)$ 的一阶常微分方程. 特别在(***)中置 $x=x_0$, 由 $\varphi_y(x_0, y, x_0, \zeta(y))=0$, $\varphi_\zeta(x_0, y, x_0, \zeta(y))=1$, 得到

$$\frac{d\zeta}{dy}=B(x_0, y, \zeta(y)).$$

由上式确定了 $\zeta(y)$ 后，代入 φ 的表达式，就得到 $z=\varphi(x, y, x_0, \zeta(y))$ 是方程组(2)的公共解.

二、法甫方程

形状如下的微分方程

$$P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz=0 \tag{6}$$

称为法甫 (Pfaff) 方程. 这一类方程在微分几何学中有深入的研究. 我们这里只是研究它的二维解的问题，假设 P, Q, R 在区域 G 内有连续的偏导数，且 $P^2+Q^2+R^2\neq 0$, 不妨假设 $R\neq 0$. 如果函数 $z=\varphi(x, y)$ 适合恒等式

$$P(x, y, \varphi(x, y))dx+Q(x, y, \varphi(x, y))dy$$
$$+R(x, y, \varphi(x, y))\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\right)\equiv 0,$$

即
$$R(x, y, \varphi(x, y))\frac{\partial\varphi}{\partial x}+P(x, y, \varphi(x, y))\equiv 0,$$

$$R(x, y, \varphi(x, y))\frac{\partial\varphi}{\partial y}+Q(x, y, \varphi(x, y))\equiv 0,$$

也就是说 $z=\varphi(x, y)$ 是方程组

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{P}{R}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Q}{R} \tag{7}$$

的公共解，那末称 $z=\varphi(x, y)$ 是方程(6)的二维解。因此当 $R\neq 0$ 时，求方程(6)的二维解相当于求解方程组(7)。由此容易证明，方程(6)过区域 G 的每一点有一积分曲面的充分和必要条件是

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\equiv 0. \tag{8}$$

同样，当 $P\neq 0$，方程(1)有形状如 $x=\varphi(y, z)$ 的积分曲面时，也得到关系式(8)。

如果类似于在第一章中对全微分方程那样来讨论方程(6)，就可看到，如果(6)的左端是函数 $u(x, y, z)$ 的全微分，即

$$du(x, y, z)\equiv P dx+Q dy+R dz,$$

那末

$$u(x, y, z)=c$$

是方程(6)的积分曲面族。

三、求全积分的拉格朗日-夏比方法

为了求方程

$$F(x, y, z, p, q)=0 \tag{9}$$

的全积分，我们先设法补充一个方程

$$G(x, y, z, p, q)=a, \tag{10}$$

使得它与(9)有含有一个参数的公共积分曲面族

$$z=\varphi(x, y, a, b), \tag{11}$$

那末(11)是方程(9)的积分曲面族。可以证明，如果 $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(p, q)}\neq 0$，那末(11)确是(9)的含有两个实质参数的解族，从而是方程(9)的全积分。这就是求方程(9)的全积分的拉格朗日(Lagrange)-夏比(Sharpit)方法。

现在的问题是，函数 G 应适合什么条件，方程(9)和(10)才有

含一个参数的公共解族？这个问题相当于方程组(9)和(10)是相容的问题.

现在来讨论方程组(9)和(10)的相容性条件.

从方程组(9)和(10)解出 p, q:

$$p=A(x, y, z, a), \quad q=B(x, y, z, a),$$

再把解得的结果代入(9)和(10)，就得到

$$F(x, y, z, A(x, y, z, a), B(x, y, z, a))\equiv 0,$$

$$G(x, y, z, A(x, y, z, a), B(x, y, z, a))\equiv a,$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial z}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\partial G}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial z}\equiv 0,$$

关于 $\frac{\partial A}{\partial z}, \frac{\partial B}{\partial z}$ 解出来，得到

$$A_z=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial q}\\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial q}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q}\\ \frac{\partial G}{\partial p} & \frac{\partial G}{\partial q}\end{vmatrix}}, \quad B_z=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial p} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q}\\ \frac{\partial G}{\partial p} & \frac{\partial G}{\partial q}\end{vmatrix}};$$

同样可以得到

$$A_y=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial q}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial q}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q}\\ \frac{\partial G}{\partial p} & \frac{\partial G}{\partial q}\end{vmatrix}}, \quad B_x=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial p} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q}\\ \frac{\partial G}{\partial p} & \frac{\partial G}{\partial q}\end{vmatrix}}.$$

代入相容性条件 $A_y+A_zB\equiv B_x+B_zA$，得到

$$-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial q}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial q}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial q}\\ \dfrac{\partial G}{\partial z} & \dfrac{\partial G}{\partial q}\end{vmatrix}B$$

$$+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial p} & \dfrac{\partial F}{\partial x}\\ \dfrac{\partial G}{\partial p} & \dfrac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial p} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial G}{\partial p} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}A\equiv 0.$$

当 $p=A$, $q=B$ 时,关于 x, y, z 恒成立. 所以

$$-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial q}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial q}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial q}\\ \dfrac{\partial G}{\partial z} & \dfrac{\partial G}{\partial q}\end{vmatrix}q$$

$$+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial p} & \dfrac{\partial F}{\partial x}\\ \dfrac{\partial G}{\partial p} & \dfrac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial p} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial G}{\partial p} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}p\equiv 0$$

关于 x, y, z, p, q 恒成立(特别, 当 $p=A$, $q=B$ 时它关于 x, y, z 也恒成立)是方程组(9), (10)相容的充分条件.

如果置 $X=\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $Y=\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $Z=\dfrac{\partial F}{\partial z}$, $P=\dfrac{\partial F}{\partial p}$, $Q=\dfrac{\partial F}{\partial q}$, 那末上式可以写成

$$P\frac{\partial G}{\partial x}+Q\frac{\partial G}{\partial y}+(pP+qQ)\frac{\partial G}{\partial z}$$

$$-(X+pZ)\frac{\partial G}{\partial p}-(Y+qZ)\frac{\partial G}{\partial q}=0. \tag{12}$$

因此, 关系式(12)就是方程组(9), (10)相容的充分条件. 它是关于五个变量 x, y, z, p, q 的未知函数 G 的线性齐次偏微分方程. 在§2中我们已經知道,为了求解方程(12), 只要求出相应的常微分方程组

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{pP+qQ}=\frac{dp}{-(X+pZ)}=\frac{dq}{-(Y+qZ)}$$

的首次积分. 或引进参数 s, 把该方程组写为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{ds}=P,\quad \frac{dy}{ds}=Q,\quad \frac{dz}{ds}=pP+qQ,\\&\frac{dp}{ds}=-(X+pZ),\ \frac{dq}{ds}=-(Y+qZ).\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

方程组(13)也称为偏微分方程(9)的特征方程.

很明显，函数 $F(x, y, z, p, q)$ 是方程组 (13) 的一个首次积分，这是因为

$$PX+QY+(pP+qQ)Z-(X+pZ)P-(Y+qZ)Q\equiv 0.$$

因此为了应用拉格朗日-夏比方法来求方程(9)的全积分，应当求方程组 (13) 的另一个与 F 无关的首次积分 $G(x, y, z, p, q)$，即要求它适合条件 $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(p, q)}\neq 0$.

[例 1] 试用拉格朗日-夏比方法求方程

$$p^2+q^2=1$$

的全积分.

它的特征方程是

$$\frac{dx}{ds}=2p,\quad \frac{dy}{ds}=2q,\quad \frac{dz}{ds}=2(p^2+q^2)=2,$$

$$\frac{dp}{ds}=0,\quad \frac{dq}{ds}=0.$$

所以 $p=a$ 是它的一个首次积分，且与 p^2+q^2-1 无关. 由

$$\begin{cases}p=a,\\p^2+q^2=1\end{cases}$$

解出 p 和 q，得到

$$\begin{cases}p=a,\\q=\pm\sqrt{1-a^2}\end{cases}$$

因此

$$z=ax\pm\sqrt{1-a^2}\,y+c$$

是方程的全积分.

[例 2] 试用拉格朗日-夏比方法求方程

$$p^2+q^2+pq-qx-py-2z+xy=0\tag{14}$$

的全积分.

它的特征方程是

$$\frac{dx}{ds}=2p+q-y,\quad \frac{dy}{ds}=2q+p-x,$$

$$\frac{dz}{ds}=2(p^2+q^2+pq)-py-qx,$$

$$\frac{dp}{ds}=q-y+2p,\quad \frac{dq}{ds}=p-x+2q.$$

由此 $$dx-dp=0.$$

所以 $$p-x=a$$

是一个首次积分.

由 $p-x=a$, $p^2+q^2+pq-qx-py-2z+xy=0$ 解出 p 和 q, 得

$$p=x+a,$$

$$q=-\frac{a}{2}+\sqrt{2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}}.$$

为了求它的公共解,我们作法甫方程

$$dz=(x+a)dx+\left(-\frac{a}{2}+\sqrt{2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}}\right)dy$$

或

$$dy=\frac{dz+\frac{a}{2}dy-(x+a)dx}{\sqrt{2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}}}=\frac{d\left(2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}\right)}{2\sqrt{2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}}},$$

所以得到 $$y+b+\frac{a}{2}=\sqrt{2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}}.$$

因此 $$2z=(x+a)^2+(y+b)^2+ab$$

就是方程(14)的全积分.

习 题

求下列方程组的公共解(1~5):

1. $p=\frac{z-a}{x},\ q=\frac{z-a}{y}$.　　2. $p^2+z^2=1,\ q^2+4z^2=4$.

3. $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{y-x}{z},\ \frac{\partial x}{\partial z}=-y$.　　4. $p=z+yz,\ q=z^2+2xz$.

5. $p=2yz-z^2,\ q=xz$.

6. 求方程组$p=\dfrac{1-4x}{4z}$, $q=\dfrac{1+4y}{z}$经过点(1, 1, 1)的积分曲面.

*7. 试求与双叶双曲面族

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1 \quad (a^2>\lambda>b^2)$$

和单叶双曲面族

$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}=1 \quad (b^2>\mu>c^2)$$

都正交的曲面,其中a, b, c是常数,且满足关系$a^2>b^2>c^2$.

8. 证明法甫方程

$$P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz=0$$

经过它的定义域中每一点都有一二维解的充分和必要条件是成立着恒等式

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\equiv 0.$$

求下列方程的二维解(9~11):

9. $(yz-z^2)dx-xz\,dy+xy\,dz=0$.

10. $z(1-z^2)dx+z\,dy-(x+y+xz^2)dz=0$.

11. $(2x^2+2xy+2xz^2+1)dx+dy+2z\,dz=0$.

用拉格朗日-夏比方法求下列方程的全积分(12~15):

12. $p^2x^2+q^2y^2=2z$.

13. $2(y+zq)=q(xp+yq)$.

14. $(p^2+q^2)x-pz=0$.

15. $p^2=z^2(1-pq)$.

16. 设对于任何常数c, $\varphi(x, y)=c$是常微分方程

$$a(x, y)(dy)^2-2b(x, y)dx\,dy+c(x, y)(dx)^2=0$$

的积分. 试证$z=\varphi(x, y)$是偏微分方程

$$a(x, y)p^2+2b(x, y)pq+c(x, y)q^2=0$$

的解.

17. 试利用上题方法求出方程

$$x^2p^2-y^2q^2=0$$

的两个解$z=\varphi_1(x, y)$和$z=\varphi_2(x, y)$,而函数$\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$是互相独立的.

§5 哈密顿-雅可比理论

一、n个自变量的一阶偏微分方程

前面关于含两个自变量的未知函数的偏微分方程的一般理论,很容易拓广到含有n个自变量的未知函数的一阶偏微分方程

$$F(x_1, \cdots, x_n, z, p_1, \cdots, p_n)=0, \tag{1}$$

这里 $x_1, \cdots, x_n$ 是自变量，z 是未知函数，

$$p_1=\frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, p_n=\frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

函数 $F(x_1, \cdots, x_n, z, p_1, \cdots, p_n)$ 是 $2n+1$ 个变量的函数，它关于其变元有二阶连续偏导数，且

$$F_{p_1}^2+F_{p_2}^2+\cdots+F_{p_n}^2\neq 0.$$

方程(1)的含有 n 个实质参数的积分曲面族

$$z=\varphi(x_1, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_n) \tag{2}$$

称为方程(1)的全积分。

方程(1)的特征方程是

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_j}{ds}=P_j, \quad \frac{dz}{ds}=\sum_{k=1}^{n} p_k P_k, \\ &\frac{dp_j}{ds}=-(X_j+p_j Z), \end{aligned} \quad (j=1, 2, \cdots, n)\right\} \tag{3}$$

这里

$$X_j=\frac{\partial F}{\partial x_j}, \ Z=\frac{\partial F}{\partial z}, \ P_j=\frac{\partial F}{\partial p_j} \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

至于求方程(1)的全积分的一般方法我们这里不作介绍。在许多特殊情形下，可以用分离变量法求它的全积分。

二、正则方程组

在分析力学中，动力学问题常归结为求解 $2n$ 个方程的一阶常微分方程组

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k}, \\ &\frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}, \end{aligned} \quad (k=1, \cdots, n)\right\} \tag{4}$$

这里自变量是 t，未知函数是 $q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n$，其中函数 $H=H(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, t)$ 是某一给定的函数，称为哈密顿(Hamilton)函数。方程组(4)称为正则方程组或哈密顿方程组。

这个常微分方程组和偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial t}+H\left(q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial z}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial q_n}, t\right)=0 \tag{5}$$

有密切联系. 在方程(5)中, 自变量是 $t, q_1, \cdots, q_n$, 未知函数是 z.

如果在方程(5)中, 记 $p=\frac{\partial z}{\partial t}$, $p_k=\frac{\partial z}{\partial q_k}$ $(k=1, \cdots, n)$, 那末(5)可写为形状

$$p+H(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, t)=0. \tag{6}$$

但是应当注意, 这里的 $p_1, \cdots, p_n$ 的意义和方程组(4)中的未知函数是绝不相同的, 不要把它们混淆起来.

方程(5)或(6)的特征方程是

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dt}{ds}=1,\\
&\frac{dq_k}{ds}=\frac{\partial H}{\partial p_k},\\
&\frac{dz}{ds}=p+\sum_{l=1}^{n} p_l\frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad (k=1, \cdots, n)\\
&\frac{dp_k}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial q_k},\\
&\frac{dp}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

根据(7)的第一式, 有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k},\\
&\frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k},\\
&\frac{dz}{dt}=p+\sum_{l=1}^{n} p_l\frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad (k=1, 2, \cdots, n)\\
&\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

因为 H 与 z, p 无关, 所以方程组(8)的前面 $2n$ 个方程可以单独求解, 它就是正则方程组(4).

在前面讨论两个自变量的方程时, 常把求解偏微分方程的问题化为求解常微分方程组的问题. 然而在分析力学中, 却常常利

用方程(5)的全积分来求解正则方程组(4)，这种方法的基础是下面的雅可比(Jacobi)定理。

定理(雅可比) 如果

$$z=\varphi(q_1, \cdots, q_n, t, a_1, \cdots, a_n)+a \tag{9}$$

是偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial t}+H\left(q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial z}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial q_n}, t\right)=0$$

的全积分，那末由关系式

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{a_k}(q_1, \cdots, q_n, t, a_1, \cdots, a_n)=b_k \\ \varphi_{q_k}(q_1, \cdots, q_n, t, a_1, \cdots, a_n)=p_k \end{aligned} \quad (k=1, 2, \cdots, n)\right\} \tag{10}$$

所决定的带有 $2n$ 个任意常数 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ 的曲线族

$$\left.\begin{aligned} q_k=q_k(t, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) \\ p_k=p_k(t, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) \end{aligned} \quad (k=1, 2, \cdots, n)\right\} \tag{11}$$

是正则方程组(4)：

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (k=1, 2, \cdots, n)\right\}$$

的解。

在证明定理之前，我们先作一些解释。因为偏微分方程(5)中的自变量是 $t, q_1, \cdots, q_n$，共有 $n+1$ 个，所以它的全积分中应含有 $n+1$ 个任意常数。又因为在(5)中，未知函数 z 不明显地出现，所以如果 $z=\varphi$ 是它的一个积分曲面，那末 $z=\varphi+a$ 也是它的一个积分曲面，所以它的全积分中可以有一个可加常数，我们在(9)中把它记为 a，另外的 n 个常数记为 $a_1, \cdots, a_n$。

其次，因为(9)含有 $n+1$ 个实质参数，因而函数矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_1} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial a_1} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial q_n\partial a_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_n} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial a_n} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\partial a_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial q_n\partial a_n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

的最大秩数是 $n+1$(参见§3,二),从而矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial a_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_n\partial a_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial a_n} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\partial a_n} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_n\partial a_n} \end{pmatrix} \tag{12}$$

的最大秩数是 n.

现在来证明定理。

将(11)代入(10),得到 $2n$ 个恒等式,由关系式(10)的第一式,对 t 求导数,注意到 $q_1, \cdots, q_n$ 是 t 的函数,得到

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_k\partial t}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_k\partial q_l}\frac{dq_l}{dt}=0 \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{13}$$

又因为 φ 是方程(5)的全积分,所以

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+H\left(q_1,\ \cdots,\ q_n,\ \frac{\partial\varphi}{\partial q_1},\ \cdots,\ \frac{\partial\varphi}{\partial q_n},\ t\right)=0. \tag{14}$$

两边关于 a_k 导微,得到

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial a_k}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_l}\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_l\partial a_k}=0 \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{15}$$

由(13)和(15)得到量 $\frac{dq_1}{dt}, \cdots, \frac{dq_n}{dt}$ 和 $\frac{\partial H}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial H}{\partial p_n}$ 都是线性代数方程组

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_k\partial t}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_k\partial q_l}x_l=0 \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{16}$$

的解. 但方程组(16)的增广矩阵(12)的秩数是 n, 所以(16)的系数行列式不为零(因为(16)有解存在). 根据线性代数方程组的理论,代数方程组的解是唯一的,因此

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (k=1,\ \cdots,\ n). \tag{17}$$

其次,将(10)的第二式对 t 导微,得到

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial q_k}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_k\partial q_l}\frac{dq_l}{dt}=\frac{dp_k}{dt} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{18}$$

又由(14)式对 q_k 导微,得到

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial q_k}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_l\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_l}+\frac{\partial H}{\partial q_k}\equiv 0\quad(k=1,\ \cdots,\ n).$$

由此，利用(17)得到

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial q_k}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_l\partial q_k}\frac{dq_l}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n).\tag{19}$$

由(18)和(19)得到

$$\frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}\quad(k=1,\ \cdots,\ n).$$

这就证明了定理。

下面以两体问题说明这个定理的作用。

三、两体问题

考察两个质量为 m 和 M 的质点在万有引力作用下的运动，这个问题就是著名的两体问题．所谓万有引力作用，是指两个质点之间有大小与距离平方成反比的引力互相作用，且引力的方向是沿着两质点的连线．如果我们取质量为 M 的质点作为坐标原点 O，考虑质量为 m 的质点 P 绕点 O 的相对运动．力学中已证明过，点 P 在一个平面内运动．所以，我们以 O 为坐标原点，以 P 所在的平面为坐标平面，点 P 的坐标记为 $(x,\ y)$，那末质点 P 所受到的力是指向点 O，且这力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影分别为

$$-\frac{k^2m}{(x^2+y^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad -\frac{k^2m}{(x^2+y^2)}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\tag{20}$$

这里 $k^2=\varkappa(M+m)$，$\varkappa$ 是引力常数．我们在(20)中已经考虑到取 O 为坐标原点时所产生的附加作用．

由牛顿第二定律有

$$\ddot{x}=-\frac{k^2}{(x^2+y^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \ddot{y}=-\frac{k^2}{(x^2+y^2)}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\tag{21}$$

如果记 $q_1=x$，$q_2=y$，$p_1=\dot{x}$，$p_2=\dot{y}$，那末方程组(21)可以写为形状

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dq_1}{dt}=p_1, && \frac{dq_2}{dt}=p_2,\\ &\frac{dp_1}{dt}=-\frac{k^2q_1}{(q_1^2+q_2^2)^{\frac{3}{2}}}, && \frac{dp_2}{dt}=-\frac{k^2q_2}{(q_1^2+q_2^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

容易验证函数

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)-\frac{k^2}{(q_1^2+q_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

可以作为该系统的哈密顿函数，关于这个函数的物理意义在理论力学中有讨论，

由此，为了解常微分方程组(22)，我们只要求出它所对应的偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2\right]-\frac{k^2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}=0 \tag{23}$$

的全积分. 为计算便利起见，引进极坐标(r,θ):

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

这时

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta.$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial q_1}=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_2}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\cos\theta.$$

因此方程(23)变为

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2\right]-\frac{k^2}{r}=0. \tag{24}$$

我们利用分离变量法求方程(24)的全积分. 假设

$$z=f(r)+g(\theta)+h(t),$$

代入(24)得到

$$\frac{1}{2}\left[f'^2(r)+\frac{1}{r^2}g'^2(\theta)\right]-\frac{k^2}{r}=-\frac{dh(t)}{dt}. \tag{25}$$

这表明 $-\frac{dh(t)}{dt}$ 必须是常数，设它等于 a_1，即

$$\frac{dh(t)}{dt}=-a_1,$$

所以

$$h(t)=-a_1t+\text{常数};$$

此外，

$$\frac{1}{2}\left[f'^2(r)+\frac{1}{r^2}g'^2(\theta)\right]-\frac{k^2}{r}=a_1,$$

即

$$g'^2(\theta)=2a_1r^2+2k^2r-r^2f'^2(r).$$

它表明 $g'(\theta)$ 也是常数，设它是 $-a_2$，那末

$$g'(\theta)=-a_2,$$

$$g(\theta)=-a_2\theta+\text{常数};$$

这时

$$2a_1r^2+2k^2r-r^2f'^2(r)=a_2^2,$$

即

$$f'(r)=\pm\sqrt{2a_1+\frac{2k^2}{r}-\frac{a_2^2}{r^2}}.$$

由此得到

$$f(r)=\pm\int_{r_0}^{r}\sqrt{2a_1+\frac{2k^2}{\rho}-\frac{a_2^2}{\rho^2}}\,d\rho+\text{常数},$$

这里 r_0 是某常数.

因此，
$$z=\varphi(r,\ \theta,\ t,\ a_1,\ a_2)+a$$
$$=-a_1t-a_2\theta-\int_{r_0}^{r}\sqrt{2a_1+\frac{2k^2}{\rho}-\frac{a_2^2}{\rho^2}}\,d\rho+a$$

是方程(24)的全积分.

根据雅可比定理，方程组(21)（注意！这里不是方程组(22)）的解可以由

$$\left.\begin{aligned}b_1&=\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}=-t-\int_{r_0}^{r}\left(2a_1+\frac{2k^2}{\rho}-\frac{a_2^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\rho,\\ b_2&=\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}=-\theta+\int_{r_0}^{r}\left(2a_1+\frac{2k^2}{\rho}-\frac{a_2^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{a_2}{\rho^2}\,d\rho\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

得到.

为了确定运动，假设当 $t=t_0$ 时，P 点的极坐标为 $(r_0,\ \theta_0)$，那末由(26)得到：$b_1=-t_0,\ b_2=-\theta_0$. 现在确定另外两个常数 a_1 和 a_2. 假设当 $t=t_0$ 时，初始径向速度为 u_0，角速度为 ω_0，那末

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=t_0}=u_0,$$
$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=t_0}=\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_{r=r_0}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=t_0}=u_0\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_{r=r_0}=\omega_0.$$

由(26)得到
$$\left(\frac{dt}{dr}\right)_{t=t_0}=\frac{1}{u_0}=-\left(2a_1+\frac{2k^2}{r_0}-\frac{a_2^2}{r_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$
$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_{r=r_0}=\frac{\omega_0}{u_0}=a_2\left(2a_1+\frac{2k^2}{r_0}-\frac{a_2^2}{r_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{r_0^2}.$$

从此得到
$$a_2=-\omega_0r_0^2,$$
$$a_1=\frac{1}{2}\left(u_0^2+\omega_0^2r_0^2-\frac{2k^2}{r_0}\right).$$

(26)的第二式为
$$\theta-\theta_0=a_2\int_{r_0}^{r}\left(2a_1+\frac{2k^2}{\rho}-\frac{a_2^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d\rho}{\rho^2}.\tag{27}$$

关系式(27)即(26)的第二式确定了运动的轨道，而(26)的第一式是确定运动经过某一点的时间的. 现在讨论运动轨道的形状. 为此，在(27)式的积分中置 $\frac{1}{\rho}=\xi$，那末

$$\theta-\theta_0=a_2\int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r_0}}(2a_1+2k^2\xi-a_2^2\xi^2)^{-\frac{1}{2}}d\xi$$
$$=a_2\int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r_0}}\left[2a_1+\frac{k^4}{a_2^2}-\left(a_2\xi-\frac{k^2}{a_2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}d\xi$$
$$=\arcsin\frac{a_2^2\xi-k^2}{\sqrt{k^4+2a_1a_2^2}}\Bigg|_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r_0}}.$$

记 $A=\frac{a_2^2}{k^2}$, $\varepsilon^2=\sqrt{1+2\frac{a_1a_2^2}{k^4}}$,那末①

$$\theta-\theta_0=\arcsin\frac{A\xi-1}{\varepsilon^2}\Bigg|_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r_0}},$$

即
$$\theta-\beta=\arcsin\frac{1-\frac{A}{r}}{\varepsilon^2},$$

其中
$$\beta=\theta_0+\arcsin\frac{1-\frac{A}{r_0}}{\varepsilon^2}.$$

因此运动轨道的方程是

$$r=\frac{A}{1-\varepsilon^2\sin(\theta-\beta)}.$$

这是一条二次曲线,当 $\varepsilon^2<1$ 时是椭圆,当 $\varepsilon^2=1$ 时是抛物线,当 $\varepsilon^2>1$ 时是双曲线。

从此得到结论,两质点在万有引力作用下的运动是这样的:一个质点对另一质点 O 而言是沿一条二次曲线运动,且质点 O 位在这条二次曲线的一个焦点上。

习 题

试用哈密顿-雅可比方法求解常微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x.$$

---

① $$k^4+2a_1a_2^2=k^4+\left(u_0^2+\omega_0^2r_0^2-\frac{2k^2}{r_0}\right)\omega_0^2r_0^4$$
$$-u_0^2\omega_0^2r_0^4+(k^2-\omega_0r_0^3)^2\geqslant 0.$$

习 题 答 案

第一章

§1. 4. $y=\begin{cases}\dfrac{65}{64}x+\dfrac{57}{64}, & -1.5<x\leqslant -1,\\ \dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}, & -1<x\leqslant -0.5,\\ 0, & -0.5<x<0.5,\\ \dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{8}, & 0.5\leqslant x<1,\\ \dfrac{65}{64}x-\dfrac{57}{64}, & 1\leqslant x<1.5.\end{cases}$

5. $x=\ln\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)+1$; $x=\ln\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)+\ln 3+1 \quad (t>1)$.

6. $x=-\ln\cos t\left(|t|<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. $u(t)=(u_0-20)\cdot\left(\dfrac{u_1-20}{u_0-20}\right)^{\frac{t}{t_1}}+20$.

8. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y\cos\alpha+x\sin\alpha}{x\cos\alpha-y\sin\alpha}$.

9. 设 $x=x(t)$，则 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x-t}{t}$.

§2. 1. $x=\dfrac{ct}{1+t^2}$.

2. $\operatorname{tg} t\cdot\operatorname{tg} x=c$.

3. $x=2\operatorname{arc\,tg}(ce^t)$ 及 $x=(2n-1)\pi$.

4. $(t^2-1)(x^2-1)=c$.

5. $\arcsin t+\arcsin x=c$.

6. $x=\operatorname{tg}(t+c)$.

7. $xt=c(t^3+x^3)$ 及 $x=-t$, $x=0$.

8. $(x-t+1)^2(x+t-1)^5=c$.

9. $x=ce^{\frac{x}{t}}$.

10. $5t+10x+7=ce^{5x-10t}$.

11. $u=ce^{-\frac{t}{Rc}}+\dfrac{E_0}{1+R^2c^2\omega^2}(\sin\omega t-Rc\omega\cos\omega t)$.

12. $x=\frac{1}{\cos t}\left(c+\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)$.

13. $t=cx+\frac{1}{2}x^3$ 及 $x=0$.

14. $x=\frac{t^2}{ct-1}$ 及 $x=0$.

15. $x=\left(ct^2-\frac{1}{2}t\right)^2$ 及 $x=0$.

16. $x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(c+\ln\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{|t|}\right)$.

17. $t\left(ce^{-\frac{1}{2}x^2}-x^2+2\right)=1$.

18. $x=\frac{1}{t\left[c-\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]}$ 及 $x=0$.

19. $\sqrt{1+t^2+x^2}+\operatorname{tg}^{-1}\frac{t}{x}=c$.

20. $te^{-x}+x=c$.

21. $\frac{1}{t}e^x+x^2=c$.

22. $t^2-\frac{t}{x}+x+\ln|x|=c$ 及 $x=0$.

23. $\cos\frac{t}{x}-\sin\frac{x}{t}-t+\frac{1}{x}=c$.

24. $\ln|t|+\frac{x^2}{t}=c$.

25. $t^2x+\frac{1}{x}=c$ 及 $x=0$.

26. $e^{\frac{1}{x}}+\ln|x|=c$.

27. $x=ce^{-\phi(t)}+\phi(t)-1$.

29. $x=\frac{6t}{ce^{6t}-1}+3t$.

30. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+t^2}=c$; $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+t^2}=1+\sqrt{2}$.

31. $x=\arcsin[c(t-1)^2]$; $x=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}(t-1)^2$.

32. $\sqrt{t^2+x^2}=ce^{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{t}}$.

33. 1) $i=\frac{E_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$;

2) $i=\frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t+L\omega)$.

34. $v(t)=\frac{2mk_1}{k_2^2}e^{-\frac{k_2t^2}{2m}}+\frac{k_1}{k_2}\left(t^2-\frac{2m}{k_2}\right)$.

35. 约 7.78 米/分.

36. $r=ce^{\pm\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}\theta}$.

37. $x=\dfrac{e^{k(t+\omega)}}{1-e^{k\omega}}\displaystyle\int_t^{t+\omega}e^{-ks}f(s)ds$.

38. $\phi(t)=\exp[\dot{\phi}(0)t]$ 及 $\phi(t)\equiv 0$.

39. $x(t)=\operatorname{tg}[\dot{x}(0)t]$.

40. $\mu=\dfrac{1}{P(x)N(y)}$.

42. $\mu=\dfrac{1}{xM(x,\ y)+yN(x,\ y)}$.

44. $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M-N}=f(x+y)$; $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=\phi(xy)$.

45. $x^3+xy+y^3=c(x+y)$.

46. $x^2y^2+2\ln\left|\dfrac{x}{y}\right|=c$.

48. $\sin x=ce^{-t}+t$.

49. $e^{-2x}=ce^{-2t}-\dfrac{2}{3}e^t$.

50. $x^4+2tx^2-t^2=c\quad(c\neq 0)$.

51. $x=\dfrac{1}{t}e^{ct}$.

52. $(x^2-2t^2-3)^5=c(x^2-t^2-1)^2\quad(c\neq 0)$.

§3. 1. $x=c,\ x=ce^{\pm 2t}$.

2. $x=0,\ x=t+1$, $\begin{cases} t=\dfrac{1}{(1-p)^2}\left(c+\dfrac{3}{2}p^2-p^3\right), \\ x=\dfrac{p^2}{(1-p)^2}\left(c+\dfrac{3}{2}p^2-p^3\right)+p^3. \end{cases}$

3. $x=ct+c+c^2$ 及 $x=-\dfrac{1}{4}(1+t)^2$.

4. $x^2=ct+\dfrac{1}{8}c^3$ 及 $x^4=-\dfrac{32}{27}t^3$.

5. $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}\tau^2+2\tau+c, \\ t=\tau^3+\tau^2. \end{cases}$

6. $x=ct+\dfrac{m}{c}$ 及 $x^2=4mt$.

7. $x=\dfrac{1}{2}ct^2+t+\dfrac{1}{c}$ 及 $x=(1\pm\sqrt{2})t$.

8. $x=t+c$ 及 $x^2+t^2=c^2$.

9．$x=ct\pm\sqrt{c^2+1}$ 及 $x^2+t^2=1$.

10．$\begin{cases} t=\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}(c+\sin^{-1}p), \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}}(c+\sin^{-1}p)-p. \end{cases}$

11．$x=c^2(t-c)^2$ 及 $x=\dfrac{1}{16}t^4$.

12．$x=\dfrac{1}{2}c^2(t-c^2)^2$ 及 $x=\dfrac{2}{27}t^3$.

13．$x=ct-e^c$ 及 $x=t\ln t-t\quad(t>0)$.

14．$\begin{cases} t=-2a\tau-a\sin 2\tau+c, \\ x=2a\cos^2\tau. \end{cases}$

15．$x=ce^t+\dfrac{1}{c}$ 及 $x=\pm 2e^{\frac{1}{2}t}$.

16．$x=c+\dfrac{1}{c}t^2$ 及 $x=\pm 2t$.

17．$(x-c)^2=4ct$ 及 $x=-t$.

18．$x=\dfrac{1}{2}c\left(t+\dfrac{1}{c}\right)^2$，$x=0$ 及 $x=2t$.

19．$x-\dfrac{1}{2}c^2=\dfrac{1}{2}(t+c)^2$ 及 $x=\dfrac{1}{4}t^2$.

20．$x-2c^2=-\dfrac{1}{4}(t-2c)^2$ 及 $x=-\dfrac{1}{2}t^2$.

21．$(t+c)^2+x^2=a^2$ 及 $x=\pm a$.

22．$y=cx\pm\dfrac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$ 及 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

§4．1．$x=\dfrac{1}{6}c_1t^3-\dfrac{1}{2}c_1^2t^2+c_2t+c_3$；$x=\pm\dfrac{8\sqrt{3}}{315}t^{\frac{7}{2}}+c_1t+c_2$.

2．$\ln x=c_1e^t+c_2e^{-t}$.

3．$(t+c_1)^2+(x+c_2)^2=a^2$.

4．1) $x=A\sin(\omega t+B)$；

2) $x=Ae^{\omega t}+Be^{-\omega t}$.

5．$x=\dfrac{1}{2}\left(c_1e^t-\dfrac{1}{c_1}e^{-t}\right)+c_2t+c_3$.

6．$x=x_0+\dfrac{y_0}{4}\left[\left(\dfrac{y}{y_0}\right)^2-1-2\ln\left|\dfrac{y}{y_0}\right|\right]$.

7．$x=c_1e^{\frac{1}{2}t^2}\int e^{-\frac{1}{2}t^2}dt+c_2e^{\frac{1}{2}t^2}-1$.

9．$x=A\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{A}{4}t^2+B\right)$；$x=-A\,\mathrm{th}\left(\dfrac{A}{4}t^2+B\right)$；

$x=-A\,\mathrm{ch}\left(\frac{A}{4}t^2+B\right)$; $x=-\frac{4}{t^2+c}$; $x=c$ $(A>0)$.

9. $x=A\exp[4t^{\frac{5}{2}}+Bt]$.

10. $x=\left(t^2+\frac{1}{c_1^2}\right)\mathrm{tg}^{-1}c_1t-\frac{1}{c_1}t+c_2$; $x=\frac{1}{2}k\pi t^2+c$

$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$.

11. $x=\left(A+\frac{1}{2}\right)t^2+\frac{A}{2}\cos 2t+Bt+c$.

12. $x=\ln[c_1+(t+c_2)^2]$.

13. $x=2\,\mathrm{tg}^{-1}(e^{2t+2})-\frac{\pi}{3}$.

14. $x=-\frac{t+6}{t+2}$.

15. 11.2 千米/秒.

16. $x=\frac{m^2g}{k^2}(e^{-\frac{k}{m}t}-1)+\frac{mg}{k}t$.

17. $x=\frac{2}{2-t}$.

18. $y=\sin^{-1}(Ae^x)+B$.

§5. 1. $\frac{x-y}{y-z}=c_1$; $(x+y+z)(x-y)^2=c_2$.

2. $(x-y)t=c_1$; $(x+1)^2-(y+1)^2=c_2$.

3. $x^2-y^2=c_1$; $x+y-\frac{1}{2}t^2=c_2$.

4. $y=c_1t$; $x^2+y^2+t^2=c_2t$.

5. $x^2+y^2+z^2=c_1$; $yz=c_2x$.

6. $x+y=c_1t$; $x^2-y^2=c_2y$.

7. $xy=c_1$; $(x+y)(x+y+z)=c_2$.

8. $xy=c_1$; $x^4-2c_1t^2-t^4=c_2$.

9. $x=\ln|c_1t+c_2|+c_3$; $y=\ln|c_1t+c_2|+c_3-c_1$;

$z=(c_1+1)t+c_2$.

10. $x^2+y^2=c_1e^{-2f(t)}$; $\frac{x}{y}=\mathrm{tg}[g(t)+c_2]$

11. $x=c_1e^{(t+1)\sin\ln(t+1)}+c_2e^{(t+1)\cos\ln(t+1)}$,

$y=c_1e^{(t+1)\sin\ln(t+1)}-c_2e^{(t+1)\cos\ln(t+1)}$.

12. $y=\frac{3}{2x}-\frac{x}{2}$; $z=\frac{3}{2x}+\frac{x}{2}$.

13. $x=\frac{m}{k}v_0\cos\alpha\cdot(1-e^{-\frac{k}{m}t})$;

$$y=\left(\frac{m^2g}{k^2}+\frac{mv_0}{k}\sin\alpha\right)\left(1-e^{\frac{k}{m}t}\right)+\frac{mg}{k}t+h.$$

14. $x=(v_0\cos\alpha)t;\ \ y=(v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2.$

15. 取 $x_1(0)=0$，向下为正.

$$x_1=\frac{1}{2}gt^2+\frac{1}{2}(l_1-l_0)-\frac{1}{2}(l_1-l_0)\cos\frac{\pi t}{2T},$$

$$x_2=\frac{1}{2}gt^2+\frac{1}{2}(l_1+l_0)+\frac{1}{2}(l_1-l_0)\cos\frac{\pi t}{2T}.$$

第二章

§1. 1. $z=\dfrac{e^{it}}{c+ie^{it}}$.

$$x=\frac{r\cos(t-\theta)}{1+r^2-2r\sin(t-\theta)};\quad y=\frac{r\sin(t-\theta)-1}{1+r^2-2r\sin(t-\theta)}.$$

2. $z_1=c_1e^{\lambda t};\ \ z_2=(c_1t+c_2)e^{\lambda t}$.

§2. 1. 1° $x=c_1e^t+c_2e^{-t}$.

2° $x=c_1+c_2e^{2t}$.

3° $x=(c_1+c_2t)e^{2t}$.

4° $x=c_1e^{2t}+c_2e^{4t}$.

5° $x=(c_1+c_2t)e^{-\frac{1}{2}t}$.

6° $x=e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$;

$x=c_1e^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}t}+c_2e^{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}t}$.

7° $x=A_1\cos\sqrt{5}\,t+B_1\sin\sqrt{5}\,t+\frac{1}{5}(1-\cos\sqrt{5}\,t)$

$=A\cos\sqrt{5}\,t+B\sin\sqrt{5}\,t+\frac{1}{5}$;

$x=c_1e^{\sqrt{5}it}+c_2e^{-\sqrt{5}it}+\frac{1}{5}(1-\cos\sqrt{5}\,t)$.

8° $x=e^{\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{1}{2}t+B\sin\frac{1}{2}t\right)$;

$x=c_1e^{\frac{1}{2}(1+i)t}+c_2e^{\frac{1}{2}(1-i)t}$.

9° $x=c_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)t}+c_2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)t}$.

3. 1° $x=\frac{1}{2}(e^{t-1}-e^{1-t})$.

3° $x=(t-1)e^{2t-2}$,

8° $x=2e^{\frac{1}{2}(t-1)}\sin\frac{t-1}{2}$.

4. 1° $y=c_1+(c_2+c_3x)e^x$.

2° $x=c_1e^t+c_2e^{-t}$; $x=c_1\cos t+c_2\sin t$.

3° $x=e^{\pm\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

4° $y=\ln(c_1e^{-t}+c_2e^{-3t})$.

5° $y=\arcsin(c_1\cos t+c_2\sin t)$.

6° $x=c_1t^{\frac{1}{2}}+c_2t$.

7° $x=c_1e^{2t}+c_2e^t+c_3e^{-t}$.

6. $a_0a_1>0$.

7. $x=\frac{1}{5}t\quad\frac{9}{25}$.

9. $a_1=0$, $a_0a_2>0$. 或 $x(0)=x(\omega)$, $\dot{x}(0)=\dot{x}(\omega)\ (\omega\neq0)$.

11. 1° $x=\frac{1}{t}$.

2° $x=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}$.

3° $x=\frac{1}{12}(1-t\sin 2t)$.

4° $x=\frac{1}{15}\cos 2t-\frac{t}{10}\cos t$.

12. $x=c_1t^2+c_2t^3+\frac{1}{2}t$.

14. $x(t)=c(1-t)e^{-t}+\int_0^t(1-t+\tau)e^{-(t-\tau)}f(\tau)d\tau$;

$x(0)=x_0$.

16. 1) $\beta^2\neq1$ 时: 记 $\lambda_{1,2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-1}$.

$$x(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{1}{1-e^{\lambda_1\omega}}\int_0^\omega e^{\lambda_1(t+\omega-\tau)}f(\tau)d\tau-\frac{1}{1-e^{\lambda_2\omega}}\int_0^\omega e^{\lambda_2(t+\omega-\tau)}f(\tau)d\tau\right]+\int_0^t\frac{e^{\lambda_1(t-\tau)}-e^{\lambda_2(t-\tau)}}{\lambda_1-\lambda_2}f(\tau)d\tau;$$

2) $\beta^2=1$ 时:

$$x(t)=\frac{\omega e^{-\beta\omega}}{(1-e^{-\beta\omega})^2}\int_0^\omega e^{-\beta(t+\omega-\tau)}f(\tau)d\tau+\frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}\int_0^\omega(t+\omega-\tau)e^{-\beta(t+\omega-\tau)}f(\tau)d\tau$$

$$+\int_0^t (t-\tau)e^{-\beta(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau.$$

§3. 1. 1° $x=e^{-t}[(c_1+c_2t)\cos t+(c_3+c_4t)\sin t]$;

$x=c_1e^{(-1+i)t}+c_2e^{(-1-i)t}$.

2° $$x=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+c_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$
$$+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+c_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right);$$

$$x=c_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)t}+c_2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)t}+c_3e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)t}+c_4e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)t}.$$

3° $x=c_1+(c_2+c_3t)\cos 2t+(c_4+c_5t)\sin 2t$;

$x=c_1+(c_2+c_3t)e^{2it}+(c_4+c_5t)e^{-2it}$.

4° $x=(c_1+c_2t+c_3t^2+c_4t^3)e^t$.

5° 当 $a=0$ 时: $x=c_1+c_2t+c_3t^2+\cdots+c_nt^{n-1}$;

当 $a\neq 0$ 时:

1) n—偶数及 n—奇数, 而 $a>0$, 则

$$x=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}e^{|a|\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi\right)t}\left[A_k\cos|a|\left(\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)t\right.$$
$$\left.+B_k\sin|a|\left(\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)t\right];$$

$$x=\sum_{k=0}^{n-1}c_ke^{|a|\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)t}.$$

2) n—奇数, 而 $a<0$, 则

$$x=\sum_{k=0}^{(n-1)/2}e^{|a|\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\right)t}\left[A_k\cos|a|\left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)t\right.$$
$$\left.+B_k\sin|a|\left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)t\right];$$

$$x=\sum_{k=0}^{n-1}c_ke^{|a|\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)t}.$$

6° $x=(c_1+c_2t)\cos t+(c_3+c_4t)\sin t+t$;

$x=(c_1+c_2t)e^{it}+(c_3+c_4t)e^{-it}+t$.

2. $x=2\cos t-\sin t$.

3. 1° $x^{(3)}+x^{(2)}+\dot{x}+x=0$.

2° $x^{(8)}-2x^{(7)}-4x^{(5)}-11x^{(4)}-14x^{(3)}-18\ddot{x}-8\dot{x}-8x=0$.

3° $x^{(n)}-c_n^1x^{(n-1)}+c_n^2x^{(n-2)}+\cdots+(-1)^nc_n^nx=0$.

4° $$x^{(2l)}-c_l^1x^{(2l-2)}+c_l^2x^{(2l-4)}+\cdots+(-1)^jc_l^jx^{(2l-2j)}$$
$$+\cdots+(-1)^lx=0.$$

4. 1° $x=c_1|t|^n+c_2|t|^{-(n+1)}$.

2° $x=c_1\cos\ln|t+1|+c_2\sin\ln|t+1|$.

3° $x=c_1t+c_2t\ln|t|+c_3t^2$.

4° $x=|t|^{\frac{1}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|t|+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|t|\right)-1$.

7. $x=c_1t^{\frac{1}{2}}+t(c_2\cos\ln t+c_3\sin\ln t)$.

8. $x=(c_1+c_2t+c_3t^2+c_4t^3)e^t+\frac{t^4}{120}(t+5)e^t$.

10. $x=e^t$.

§4. 1. $x=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}$.

2. $x=\frac{1}{12}(1-t\sin 2t)$.

3. $x=-\frac{t}{10}\cos t+\frac{1}{15}\cos 2t$.

4. $x=\left(\frac{1}{120}t^5+\frac{1}{24}t^4\right)e^t$.

5. $x=t$.

第三章

§1 1. $e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos\beta t & -\sin\beta t\\ \sin\beta t & \cos\beta t\end{pmatrix}$.

3. 1° $x=c_1+(2c_1+4c_2)t$; $y=c_2-(c_1+2c_2)t$.

2° $x=e^{-t}(x_0+y_0t)+1+\frac{1}{4}e^t-\frac{5}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t}$;

$y=y_0e^{-t}+\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}$.

§2 1. 1° $x=c_1(1+t)+c_2$; $y=-c_1t-c_2$.

2° $x=e^{-4t}(c_1\cos t+c_2\sin t)$;

$y=e^{-4t}[-(c_1+c_2)\cos t+(c_1-c_2)\sin t]$.

3° $x=e^{-4t}(c_1+c_2t)$;

$y=-e^{-4t}(c_1+c_2+c_2t)$.

4° $x=c_1e^t+c_2e^{-2t}$;

$y=c_1e^t+c_3e^{-2t}$;

$z=c_1e^t-(c_2+c_3)e^{-2t}$.

5° $x=\left[2c_1+c_2\left(2t+\frac{1}{2}\right)\right]e^{-t}$;

$y=(c_1+c_2t)e^{-t}$;

$z=\left(-\frac{1}{2}c_2t+c_3\right)e^{-t}.$

6° $x=[-4c_1-c_2(4t+5)-c_3(2t^2+5t+8)]e^{-2t};$

$y=[-2c_1-2c_2(t+1)-c_3(t^2+2t+3)]e^{-2t};$

$z=\left[c_1+c_2(t+1)+c_3\left(\frac{1}{2}t^2+t+1\right)\right]e^{-2t}.$

7° $x=(c_1t^2+c_2t+c_3)e^{-t};$

$y=-(2c_1t+c_2)e^{-t};$

$z=2c_1e^{-t}.$

8° $x=(-c_1+c_2)e^t+(c_2+2c_3)te^t;$

$y=c_1e^t-(c_2+2c_3)te^t;$

$z=c_3e^t.$

9° $x=c_1e^t+e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right);$

$$y=c_1e^t+e^{-\frac{1}{2}t}\left[\left(-\frac{1}{2}c_2+\frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2+\frac{1}{2}c_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right];$$

$$z=c_1e^t+e^{-\frac{1}{2}t}\left[-\left(\frac{1}{2}c_2+\frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2-\frac{1}{2}c_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right].$$

10° $x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t;$

$y=-c_1e^t-c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t.$

2. $x=\exp\{-A^{-1}Bt\}\mathbf{c}.$

§4. 6. 1° $x_1=c_1e^{\sin t-\cos t}+c_2e^{\sin t+\cos t};$

$x_2=c_1e^{\sin t-\cos t}-c_2e^{\sin t+\cos t}.$

2° $x_1=c_1e^t+c_2e^{\sin t\cdot\cos t};$

$x_2=c_1e^t-c_2e^{\sin t\cos t}.$

3° $x_1=c_1e^{-2t}+c_2e^{-t+\frac{1}{2}\sin 2t};$

$x_2=c_1e^{-2t}-c_2e^{-t+\frac{1}{2}\sin 2t}.$

4° $x_1=c_1e^{-t+\cos t};$

$x_2=(c_1t+c_2)e^{-t+\cos t}.$

5° $x_1=c_1e^{-2t}\cos t+c_2\sin t;$

$x_2=c_1e^{-2t}\sin t-c_2\cos t$

7. 1° $x=c_1\cos t+c_2\sin t+\operatorname{tg} t;$

$y=c_2\cos t-c_1\sin t$.

2° $x=c_1e^t+c_2e^{2t}+2e^{2t}\,\mathrm{tg}^{-1}e^t-e^t\ln(1+e^t)$;

$y=c_1e^t+\dfrac{3}{2}c_2e^{2t}+3e^{2t}\,\mathrm{tg}^{-1}e^t-e^t\ln(1+e^t)$.

3° $x=c_1+c_2e^{-t}+2e^{-t}\ln|e^t-1|$;

$y=-2c_1-\dfrac{3}{2}c_2e^{-t}-3e^{-t}\ln|e^t-1|$.

4° $x=c_1\cos t+c_2\sin t+(t+\ln|\cos t|)\cos t+(t-\ln|\cos t|)\sin t$;

$y=(c_1-c_2)\cos t+(c_1+c_2)\sin t+2t\sin t+2(\ln|\cos t|)\cos t$.

5° $x=(c_1+c_2t)e^{-4t}+\dfrac{4}{25}e^t-\dfrac{1}{36}e^{2t}$;

$y=-(c_1+c_2+c_2t)e^{-4t}+\dfrac{1}{25}e^t+\dfrac{7}{36}e^{2t}$.

6° $x=c_1e^t+c_2e^{-t}+\dfrac{t}{2}(e^t-e^{-t})$;

$y=c_1e^t-c_2e^{-t}+\dfrac{1}{2}(t+1)e^t+\dfrac{1}{2}(t-1)e^{-t}$.

7° $x=e^{-t}\left(\dfrac{c_1}{2}t^2-c_2t+c_3\right)+t^2-3t+3$;

$y=e^{-t}(-c_1t+c_2)+t$;

$z=c_1e^{-t}+t-1$.

8° $x=c_1t^2+c_2t^{-2}-\dfrac{2}{3}t$;

$y=\dfrac{1}{3}c_1t^2-c_2t^{-2}-\dfrac{1}{3}t$.

9° $x=t(c_1\cos\ln t+c_2\sin\ln t)+t\ln t$.

10° $x=c_1e^t+c_2e^{-t}-(e^t-e^{-t})\,\mathrm{tg}^{-1}e^t$.

§5. 2. $a(t)=e^{-\frac{1}{2}\int p(t)dt}$, $r(t)=q(t)-\dfrac{1}{4}p^2(t)-\dfrac{1}{2}\dot{p}(t)$.

3. $x=c_1t^2+c_2t^3+\dfrac{1}{2}t$.

4. $(\arcsin x)^2=1+x^2+\dfrac{2^2}{4\cdot3}x^4+\dfrac{4^2}{6\cdot5}x^6+\cdots+\dfrac{(2k-2)^2}{2k(2k-1)}x^{2k}+\cdots$.

8. $x=\dfrac{1}{t}(c_1\cos t+c_2\sin t)$.

9. $x=c_1(1-t\,\mathrm{ctg}\,t)+c_2\,\mathrm{ctg}\,t$.

10. $x=c_1t+c_2\cdot\dfrac{1}{t}$.

§6 1. $\lambda=-k^2$, $y=\cos kx\quad(k=0,1,\cdots)$.

2. $y=\dfrac{2-3e}{1-e^2}e^x+\dfrac{3e-2e^2}{1-e^2}e^{-x}-x^2-2$.

3. 当 $f(x)$ 满足条件 $\int_0^{\pi} f(s)\sin s\,ds=0$ 时有解，但不唯一。

第四章

§1. 2. $x=0$。

3. $x=1$。

4. $\left|\varphi\left(\frac{1}{2}\right)-\varphi_3\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant 1.63\times10^{-4}$;

$|\varphi(1)-\varphi_3(1)|\leqslant\frac{1}{3}$.

5. $\left|x\left(\frac{1}{4}\right)-\varphi_2\left(\frac{1}{4}\right)\right|\leqslant\frac{1}{6}$.

6. $\varphi(t)=e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\left[\frac{1}{x_0}-\int_{t_0}^{t}Q(s)e^{\int_{t_0}^{s}p(\tau)d\tau}ds\right]^{-1}$.

7. 1° $x(t)\equiv\frac{\pi}{2}$.

2° $x(t)=x_0e^{\int_0^t p(\tau)d\tau}$.

§3. 2. $|x(t)-x_2(t)|\leqslant 2.28\times10^{-4}$; $|y(t)-y_2(t)|\leqslant 0.18\times10^{-4}$.

§5. 3. 1) $-\frac{1}{2}t^2$;

2) 0.

4. $t^2(\ln t+2)-2t$.

6. 2) $\frac{dz_1}{dt}=-2\cos^2 t\cdot z_1-(1+\sin 2t)z_2$;

$\frac{dz_2}{dt}=(1-\sin 2t)z_1-2\sin^2 t\cdot z_2$.

3) $z_1=c_1e^{-2t}\cos t+c_2\sin t$;

$z_2=c_1e^{-2t}\sin t-c_2\cos t$.

第五章

§1. 1. (0, 0)鞍点;

$(a, 0)$和$(-a, 0)$当 $b^2>8a^2$ 时是结点;

当 $b^2=8a^2$ 时是退化结点;

当 $b^2<8a^2$ 时是焦点.

又 $b<0$ 时稳定; $b>0$ 时不稳定.

2. 奇点是$(0, k\pi)$, $k=0$, ±1, ±2, …. 它们的类型分别是:

1) $k=2n$; $a>0$ 时，当 $a^2>4b$ 为稳定结点;

当 $a^2=4b$ 为稳定的退化结点;

当 $a^2<4b$ 为稳定焦点.

$a=0$ 时为中心.

2) $k=2n+1$: 鞍点.

其中 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

3. 1) 奇点(0, 0)是稳定结点;相轨线是 $y-3x=c(y-x)^3$.

2) 奇点(0, 0)是不稳定结点;相轨线是 $y+3x=c(y+x)^3$.

3) 奇点(0, 5)是稳定焦点;相轨线是

$$\left(y-5-\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{11}{4}x^2=c\exp\left\{\frac{2}{\sqrt{11}}\mathrm{tg}^{-1}\frac{12y-10-x}{\sqrt{11}x}\right\}.$$

4. 奇点(0, 0).

5. 1) 奇点(0, 0)是稳定结点;相轨线是 $y+x=c(y+2x)^2$.

2) 奇点(0, 0)是不稳定结点;相轨线是 $y-x=c(y-2x)^2$.

3) 奇点$\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$是稳定焦点;相轨线是

$$\left(y+x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=ce^{3\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2y}{2x+5}+1\right)}.$$

6. 奇点(0, 0).

7. 奇点是$(k\pi, 0)$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

1) $k=2n$ 时是中心.

2) $k=2n+1$ 时是鞍点.

其中 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

§2. 1. (0, 0) 和 $x^2+y^2=\frac{1}{n^2}$, $n=1, 2, \cdots$.

4. 1) 无. 2) 无. 3) 在 $0<x^2+y^2<2$ 内有不稳定的极限圈.

§3. 5. 1) $x^4+y^2=c^2x^2$ 及 $x=0$.

2) 当 $x_0\neq0$ 时:

$$x(0;x_0, y_0)=\frac{x_0(x_0^4+y_0^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[x_0^4+(x_0^4+y_0^2)^2\left(t\pm\frac{y_0}{x_0^4+y_0^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$y(0;x_0, y_0)=\pm\frac{(x_0^4+y_0^2)^2\left(t\pm\frac{y_0}{x_0^4+y_0^2}\right)}{x_0^4+(x_0^4+y_0^2)^2\left(t\pm\frac{y_0}{x_0^4+y_0^2}\right)^2}.$$

$$-\infty<t<+\infty.$$

当 $x_0=0$ 时: $x=0$,

$$y=\left(t+\frac{1}{y_0}\right)^{-1}.$$

$$-\infty<t<-\frac{1}{y_0} \quad \text{及} \quad -\frac{1}{y_0}<t<+\infty.$$

3) (0, 0)不稳定.

7. $a<0$ 时 $x=y=0$ 渐近稳定;

$a=0$ 时 $x=y=0$ 稳定;

$a>0$ 时 $x=y=0$ 不稳定.

§4. 2. (0, 0)是中心; $V=x^2+y^2$.

$a<0$ 时 $x=y=0$ 渐近稳定;

$a=0$ 时 $x=y=0$ 稳定;

$a>0$ 时 $x=y=0$ 不稳定.

3. $x=1$, $y=0$ 不稳定.

5. 相轨线: $x^2+y^2+x^4+y^4=c$; $x=y=0$ 稳定.

§5. 3. $V=10x^2+4xy+3y^2$, $x=y=0$ 渐近稳定.

第六章

§1. 1. $z=\varphi_1(y)x+\varphi_2(y)$.

2. $z=\varphi_1(y)+\varphi_2(x)$.

3. $z=x\varphi(y)-x^2y^2$.

4. $z=\varphi(x^2+y^2)$.

5. $f=\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\ \sqrt{y}-\sqrt{z})$.

6. $u=\Phi\left(\frac{y}{x},\ x^2+\frac{x^2z^2}{x^2+y^2}\right)$.

7. $u=\Phi[x-\ln|z|,\ (y^{\frac{3}{2}}-1)e^{\frac{3}{4}x^2}]$.

8. $u=\Phi\left(xe^{-z},\ \frac{1}{xy}+\frac{1}{2}\ln^2 x\right)$.

9. $u=\Phi(lx+my+nz,\ x^2+y^2+z^2)$.

10. $u=\Phi\left[z,\ \frac{(x+z)y}{y+z}\right]$.

11. $u=\Phi\left(x+\frac{1}{xz},\ \frac{1}{6}x^3+\frac{x}{2z}-y\right)$.

12. $u=\Phi\left[(y+3x)(y-x)^3,\ \ln|y|-\frac{z}{y}\right]$.

13. $u=\Phi\left(x^2+y^2+z^2,\ \frac{x}{yz}\right)$.

14. $v=\Phi[x-y,\ (x-y)u-z+u,\ (z-u)e^{-y}]$.

15. $u=\Phi(f_1,\ f_2)$.

§2. 1. $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

2. $z^2=y^2+\varphi(x^2-y^2)$.

3. $z^2=\varphi(x^2-y^2)-2y^2$.

4. $z=\varphi(x^2-y^2+2x-2y)-\ln|x-y|$.

5. $z^2=\varphi(x^2-y^2)-y^2$.

6. $z=\dfrac{x}{y}$.

7. $z=\sqrt{xy}$.

8. $z=\sqrt{a^2+h^2-xy}$.

9. $z\sin^2 x=y^3\sin^2\sqrt{\dfrac{z}{y}}$.

10. $z=xy+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$, 其中 $\varphi(1)=0$.

11. $z=\dfrac{1}{2}(5x-\sqrt{21x^2-20y})$.

12. $y^3(z^3-1)+3xyz+1=0$.

13. $y=x$.

14. $x^2+y^2+2z^2=1+2h^2$.

15. $z=xy^{-n}$.

17. $u=\dfrac{1}{(x-y)^3}\varphi\left(\dfrac{x-y}{y-z},\dfrac{x-y}{x-z}\right)-x-y-z$.

18. $u=\varphi(bx-y,\ cx-z)+\dfrac{1}{12}bcx^4-\dfrac{1}{6}(bz+cy)x^3+\dfrac{1}{2}x^2yz$.

19. $(x+z)(y+z)=y\varphi(z)$.

20. $z^2=\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)-xy$.

21. $z=\dfrac{1}{x^3y^3}\varphi\left(\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}\right)$.

22. $z^4+2xyz^2-x^4=\varphi(xy)$.

§3. 1. $z=x+y+\dfrac{4}{27}$.

2. $x^2+y^2=1$.

3. $z^2=x^2+y^2$.

4. $z=\left(y-\dfrac{x}{4}\right)^2$.

5. 无.

6. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=1$.

7. 全积分：$z=a(x^2+y^2)+b$, 通积分：$z=\varphi(x^2+y^2)$.

8. 全积分：$z=(x+a)(y+b)$, 奇积分：$z=0$.

9．全积分：$z=ax^2+by^2-\dfrac{1}{2b}$.

§4．1．$z=cxy+a$.

2．$z^2=\sin^2(x\pm 2y+c)$.

3．无解.

4．$z=0$.

5．$z=0$.

6．$z^2=\dfrac{1}{2}x-x^2+2y+4y^2-\dfrac{9}{2}$.

7．椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2-\nu}+\dfrac{y^2}{b^2-\nu}+\dfrac{z^2}{c^2-\nu}=1\ (\nu<c^2)$.

9．$z=\dfrac{y}{cx+1}$.

10．$y=(z^2-1)x+cz$.

11．$(x+y+z^2)e^{x^2}=c$.

12．$z=\dfrac{1}{2}(a+\ln|x|)^2+\dfrac{1}{2}(b+\ln|y|)^2$.

13．$z=ax^2+by^2-\dfrac{1}{2b}$.

14．$z^2=a^2x^2+(ay+b)^2$.

15．$\sqrt{1+az^2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{1+az^2}-1}{\sqrt{1+az^2}+1}=x+ay+b$.

17．$z=xy$ 和 $z=\dfrac{y}{x}$.

§5．$x=A\sin(t+B)$,

$y=A\cos(t+B)$.